MATEMÁTICAS, CIENCIA Y TECNOLOGÍA: UNA RELACIÓN PROFUNDA Y DURADERA

Juan Luis Vázquez
Departamento de Matemáticas
Universidad Autónoma de Madrid

No te preocupes demasiado por lo que son las Matemáticas antes de probar tu suerte. Ya lo irás viendo.

RESUMEN

RESUMEN

Los matemáticos suelen decir que la esencia de las Matemáticas reside en la belleza de los números, figuras y relaciones, y hay una gran verdad en ello. Pero la fuerza motriz de la innovación matemática en los siglos pasados ha sido el deseo de entender cómo funciona la Naturaleza. Este aspecto fundamental es pocas veces mencionado.

La Matemática forma junto con el método experimental el esquema conceptual en que está basada la Ciencia moderna y en el que se apoya la Tecnología, existiendo estrechas interacciones entre ellas. Sobre estas bases nació la Sociedad Industrial hace varios siglos, y la nueva Sociedad de la Información se construye en el presente siguiendo las mismas pautas.

En el artículo damos un esbozo de esta relación con la ciencia y la tecnología, de cómo se puso en marcha y de los héroes que la han hecho realidad, seguido de una ojeada al futuro, en que la relación se extiende prácticamente a toda la sociedad. Se añade un corto comentario sobre la Matemática en España.

1. INTRODUCCIÓN. ESENCIA Y PAPEL DE LAS MATEMÁTICAS

La Matemática es una disciplina intelectual autónoma, uno de los exponentes más claros del poder creativo de la mente humana. Por otra parte, juega un papel fundamental en la Ciencia moderna, tiene una marcada influencia sobre ella y a su vez se ve influenciada por la ciencia de una manera esencial. Estas son, brevemente presentadas, las dos concepciones que simbolizan las maneras diferentes de ver el gran edificio que es la Matemática actual. Estas opciones se reflejan en las populares denominaciones de Matemática Pura y Aplicada. Pero entonces, ¿es que existen dos matemáticas diferentes? y, si esto es verdad, ¿pueden coexistir pacíficamente e interactuar recíprocamente, o es que viven de hecho separadas e incluso hostiles una a la otra? En el presente artículo intentaremos mostrar que, hoy como ayer, ambas visiones de la matemática son las caras de una misma moneda, que nos parecen a veces tan diferentes, a veces tan semejantes.

Un arte puro

Una primera dimensión de las matemáticas es en efecto el aspecto puro, la matemática como un arte por derecho propio, un juego que se juega en nuestras mentes. La Matemática es un arte que expresa la belleza en forma de axiomas, teoremas y relaciones lógicas o numéricas y atrae al investigador precisamente por su perfección lógica, siendo uno de los ejemplos más claros y convincentes de la capacidad humana para el razonamiento y el análisis. Ella impone orden y armonía donde sólo veíamos desorden y caos.

Ésta es la dimensión más próxima al investigador y, como toda forma pura de arte, tiene una fascinación que explica por qué los profesionales consagramos una parte enorme y bastante exclusiva de nuestras vidas a ella. Resulta natural que los matemáticos profesionales tiendan a ver su ciencia desde este punto de vista del arte en sí mismo, con sus conceptos, conjeturas, resultados y métodos de prueba, con sus áreas venerables: la aritmética, el álgebra, la geometría y el análisis, y los nuevos retoños: la estadística, el cálculo de probabilidades, la lógica matemática, la computación,... Y estimen sobre todo sus *perfectas deducciones lógicas*. Grandes sabios han profundizado en esta dirección: PITÁGORAS ve en los números la clave de la realidad y PLATÓN ve en el mundo de las ideas un mundo de orden más perfecto que el mundo físico cotidiano. De hecho, pocos matemáticos profesionales han sido totalmente ajenos al sentimiento de que la verdadera Matemática habita más allá, en un mundo ideal, esperando a ser descubierta por el artista. En sus fabulosos 13 libros de *Los Elementos*, EUCLIDES de Alejandría (325-265 a.C.) estableció a la vez la teoría y las reglas de un juego que sigue sus pautas hoy como hace 22 siglos. Pocos artistas a lo largo de la Historia podrán decir lo mismo sobre la repercusión y perennidad de su obra: las demostraciones de Euclides son aún hoy día "las demostraciones" en los temas por él tratados. Tal es su influencia intelectual que en el siglo XX, los matemáticos asociados bajo el nombre de guerra de Nicolás BOURBAKI osaron repetir la histórica gesta con unos actuales *Elements de Mathématique*[1]. La matemática es pues un arte autónomo que halla la verdad dentro de sí misma. Recordemos a Carl G. J. JACOBI que sostuvo que la matemática sólo existe *"para honor del espíritu humano"*. Claro que de ahí también se deriva una cierta concepción popular, con su halo romántico pero hoy día un tanto descaminada, que ve al matemático como un sabio irremediablemente distraído, con poca o ninguna mente práctica.

Otra visión, otro papel

¿Refleja lo anterior el cuadro completo de la Matemática? En absoluto, *la Matemática es eso y mucho más*, hay un modo totalmente distinto de verla y de hacerla que queremos presentar. Junto con el método experimental, las matemáticas son la base sobre la que se asienta la Ciencia moderna y, como consecuencia, en ellas se apoya el desarrollo tecnológico de nuestras sociedades. Penetra hoy todos los aspectos de la sociedad contemporánea desde la ingeniería a la información, el mundo de la empresa, la salud, la administración y las finanzas, sin olvidar el movimiento de las disciplinas sociales hacia el estatus de ciencias, que significa en otros términos y con los matices apropiados, el uso combinado en estas disciplinas de los métodos matemáticos y experimentales. La importancia práctica de las matemáticas en las ciencias es indiscutible, y no está de hecho en discusión pues la mayoría aplastante de los científicos es bien consciente del *valor instrumental* de unas buenas dosis de matemáticas en la ciencia. Así, una parte cuantitativamente im-

[1] Con un éxito innegable a pesar de una cierta división de público y crítica.

portante de las matemáticas que son enseñadas en las universidades de todo el mundo se consagra a la educación de ingenieros, físicos, químicos, biólogos, informáticos, economistas y profesionales de otras varias disciplinas.

Sin embargo, creemos que tal aprecio no hace justicia al papel que las matemáticas juegan en la sociedad. Sostenemos que el *papel de la Matemática que es aplicada* en diversos contextos sociales va más allá de esta descripción, es más *esencial*. De hecho:

> (i) las matemáticas han jugado un papel fundamental en la formulación de la ciencia moderna desde sus comienzos; una teoría científica es una teoría que dispone de un modelo matemático adecuado;
>
> (ii) las matemáticas que se pueden aplicar hoy día abarcan todos los campos de la ciencia matemática y no sólo ciertos temas especiales; se trata de matemáticas de todos los niveles de dificultad y no sólo de resultados y argumentos sencillos;
>
> (iii) las ciencias exigen hoy como ayer nuevos resultados de la investigación y plantean nuevas direcciones de estudio a los investigadores. Pero el ritmo de la sociedad contemporánea hace los plazos sustancialmente más cortos y la exigencia más urgente;
>
> (iv) las capacidades del cálculo científico han hecho de la *simulación numérica* una herramienta indispensable en la comprensión, diseño y control de los procesos industriales.
>
> (v) cuando se habla de la utilidad de las matemáticas para las ciencias se incluye implícitamente en este nombre la técnica y la ingeniería. Pero hoy día los contornos son mucho más amplios y difusos; éste es un aspecto de gran importancia en el presente y el futuro de las matemáticas.

En este artículo trataremos de este aspecto en que *la Matemática es el idioma* en que están escritas las páginas de la ciencia; gracias a ella ha habido un desarrollo del combinado ciencia-tecnología que ha cambiado la vida del ciudadano de las sociedades tecnológicamente avanzadas en los últimos cuatro siglos *de una manera más radical que la Revolución Neolítica había hecho en los noventa siglos precedentes,* y el cambio ha sido más dramático en las últimas décadas que en siglos enteros anteriores.

Es un hecho bien conocido por los expertos que la práctica diaria de las ciencias físicas y la ingeniería utiliza cantidades enormes de matemática del más alto nivel. Es más, los mismos conceptos con que se formulan sus teorías son esencialmente *los conceptos matemáticos*. En las últimas décadas hemos presenciado cómo la tendencia hacia la matematización alcanza a otras disciplinas, como la Economía, particularmente el mercado financiero, ramas de la Química, la Biología y la Medicina, e incluso las ciencias sociales.

Es un hecho comprobado que la maquinaria matemática, sea imponente o no lo sea, *se oculta muy a menudo cuidadosamente* al público en los manuales o en los escritos de divulgación, como si no existiese, pues se supone que no será bien vista por el lector (o que éste no la comprenderá). Pero los nuevos tiempos traen cambios saludables: gracias a la simpatía del público por las proezas del cálculo y la informática, las matemáticas subyacentes van saliendo a la luz.

Repercusión de la Matemática

En manos del científico, *la Matemática debe permitir asimilar los datos y entender los fenómenos.* En manos del ingeniero, es la herramienta que hace posible construir un *modelo* numérico o cualitativo cuyo análisis permitirá *tomar decisiones, diseñar artefactos y controlar procesos de manera eficaz y fiable*. Esta actividad es lo que, a falta de un nombre mejor, llamamos **Matemática aplicada**. Cubre las áreas clásicas como la Física Matemática y los Métodos Matemáticos para la Ingeniería, pero tiene hoy día contornos más amplios con el advenimiento del cálculo científico y la simulación numérica. La modelización, la simulación computacional y el análisis de datos son herramientas esenciales en la ciencia y la industria modernas. La Matemática aplicada es simplemente **la Matemática de la realidad**, es decir, del mundo real, sea lo que sea lo que esta frase significa para cada lector individual.

Señalemos que hay aún otras visiones complementarias de las matemáticas: su aspecto cultural, su importancia en la enseñanza como vehículo del pensamiento racional, su importancia para comprender el mundo diario (las “matemáticas para el hombre de la calle”), su aspecto de juego intelectual (el reto de resolver un problema). La Matemática es al mismo tiempo la ciencia de lo exacto y el cálculo de lo probable.

Es la ciencia del razonamiento abstracto y simbólico. Es, también, hoy día, sinónimo de virtuosismo computacional, de capacidad y efectividad de procesar información, tan importante para el mundo que se gesta. Es el mundo del científico que trabaja con un trozo de papel y hoy, también, el mundo de la modelización, el cálculo y el control de procesos industriales. Todo ello forma también parte del múltiple legado de las matemáticas[2].

A continuación dirigimos nuestra atención hacia el pasado y presente de la Matemática Aplicada. El lector puede encontrar conveniente saltar en una primera lectura la información contenida en las notas a pie de página. Además, varias fórmulas famosas y ecuaciones importantes aparecerán aquí y allá en las páginas. ¡El propósito no es en absoluto que sean estudiadas como parte del texto! Es, más bien, recordar al lector iniciado su belleza y relevancia, y al mismo tiempo, dejar claro que no existe ningún *camino real* (es decir, regio) de acceso a la Matemática: la divulgación tiene sus límites y una comprensión real de los temas aquí perfilados implica un estudio serio. En el capítulo final volveremos a tratar de las opiniones que se debaten y los hechos que sustentan tales opiniones.

2. HEREDEROS DE GALILEO Y NEWTON

Dos grandes figuras históricas fijaron el futuro *papel estelar* de las matemáticas en los momentos en que nacía la Ciencia moderna. GALILEO *lo formuló,* NEWTON *lo demostró.* No les faltaron precursores. Habría que recordar que en la Historia Antigua, PITÁGORAS de Samos (569a.C.-475a.C.) sostuvo que *todo es número* y encontró la maravillosa conexión entre la Música y la Aritmética, mientras ARQUÍMEDES de Siracusa unió Geometría y Mecánica en el siglo III a.C. (m. 212 a.C.). Y un siglo antes de Galileo, el genio universal de LEONARDO DA VINCI *intuyó* el papel central de la Matemática en la Ciencia. Una pléyade de grandes matemáticos, los héroes de nuestro relato, los siguieron[3]. Se pue-

[2]sobre estos asuntos ver VÁZQUEZ, J. L. *"Las Matemáticas y los objetivos del año 2000. Un llamamiento a los matemáticos españoles". Gaceta de la Real Soc. Matemática Española,* vol. 3, 1. 2000. Págs. 9-22. Ver, también, http://dulcinea.uc3m.es/ceamm.

[3]En el recorrido histórico que sigue, los nombres de Galileo y Newton irán acompañados de otros matemáticos ilustres, a algunos de los cuales adjudicaremos un papel relevante. Tal selección, que nos ayudará a fijar los hitos principales y a conocer a los héroes de nuestra particular aventura, es sin duda injusta con otros personajes de la talla de Fermat, Leibniz o Gauss, de lo cual queremos dejar constancia y sólo la brevedad (el *estrecho margen* del que hablaba Fermat) y lo concreto de nuestro

de decir con Newton que los matemáticos que se ocupan de la aplicación de su arte otean el futuro desde los hombros de gigantes[4].

Procedamos por partes: es verdad que desde la más remota antigüedad, las matemáticas han estado relacionadas, incluso motivadas, por problemas prácticos. La Aritmética se origina con las actividades de contar y sumar, la Geometría proviene de medir líneas, superficies y cuerpos. Pero también es verdad que la Matemática, como ciencia lógico-deductiva, tal como fue elaborada y nos fue legada por los griegos, de Pitágoras a Euclides, tuvo una base netamente intelectual, digamos ideal, que siempre ha conservado desde entonces y que es parte fundamental de la matemática pura, es decir, de las matemáticas en sí mismas. Este proceso intelectual vive en su propio mundo y no debe nada de su mérito o belleza a la posible utilidad o aplicación práctica, no más que un poema, una sinfonía o un cuadro. Un silogismo fácil y demasiado frecuente nos llevaría de aquí a concluir que la auténtica matemática vive esencialmente ajena a la aventura de la ciencia y la tecnología. *Este silogismo es falso* por mucho que haya sido sostenido por no pocos matemáticos, y nos proponemos demostrarlo usando la obra y las opiniones de las grandes figuras. Pues *la historia nos muestra que la simbiosis con la ciencia y la tecnología ha sido fundamental y fructífera y que las matemáticas deben mucho de su ser actual y de sus temas estrella a sus compañeras de aventura. Y viceversa.*

Los dos pilares

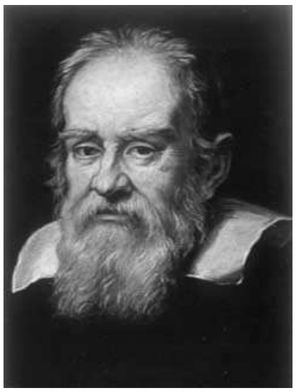
Como es bien sabido, la Ciencia moderna surgió en Europa al final del período del Renacimiento. No se basa sólo en las matemáticas. El pilar fundamental del edificio en germen fue formulado por el filósofo y político inglés Francis Bacon hacia 1620 y consiste en el *método experimental*[5]. El objeto preferente de la filosofía se orienta hacia la Naturaleza, que debemos leer y comprender, y eventualmente controlar; la observación es el medio para la comprensión y el experimento es el test de nuestras predicciones. Las ciencias se formaron alrededor de este método, primero la física, luego las demás: biología, geología y química.

---

objetivo nos sirve de excusa, pues el propósito que tenemos en mente no es la historia de la ciencia.

[4]Tomado de una frase de Newton sobre sus predecesores en carta a R. Hooke, 1675: *"If I have seen farther than others, it is by standing on the shoulders of giants"*. He tratado de incluir en el texto y notas algunas de las frases más famosas de matemáticos y científicos sobre la Matemática y su aplicación.

[5]El método inductivo se presenta en su trabajo *Novum Organum* o *Nuevo Instrumento*, 1620.



Galileo Galilei

Las matemáticas son desde el principio **el otro pilar de las ciencias**. Fue Galileo Galilei (1564-1642) quien más claramente señaló a principios del siglo XVII ese rumbo para las nacientes ciencias. Suya es la famosa cita tomada de su carta *"Il saggiatore"*[6] que reproducimos aquí en detalle: *"La filosofía está escrita en ese gran libro que constantemente está abierto ante nuestros ojos, el Universo, pero no puede entenderse a menos que se aprenda primero a comprender el idioma en que está escrito, a entender sus caracteres. Está escrito en el lenguaje matemático, y sus caracteres son triángulos, círculos y otras figuras geométricas..."*[7].

Galileo era un claro defensor del método experimental, al que contribuyó con sus famosas observaciones astronómicas y mecánicas[8]. Como hemos dicho, la actitud de Galileo tenía precedentes, siendo los más notables los de Pitágoras y Arquímedes[9] en la Antigüedad y el de Leonardo

[6]cf. *Opere,* VI. Pág. 232; *"El Ensayador"*. 1623.

[7]Las famosas palabras no suelen imprimirse en su italiano (toscano) original: *"La filosofia è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi agli occhi (io dico l'universo), ma non si può intendere se prima non s'impara a intender la lingua, e conoscer i caratteri ne' quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche, senza i quali mezzi è impossibile a intendere umanamente parola, senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro labirinto"*.

[8]Dejó escritas sus ideas sobre la física, las matemáticas y la ingeniería en el libro *Discursos y pruebas matemáticas acerca de las dos nuevas ciencias*, escrito en Florencia antes de 1633, pero sólo publicado en el extranjero en 1638 después de los problemas con la Iglesia. Las dos nuevas ciencias son la mecánica y la ciencia del movimiento. En 1995 la sonda espacial *Galileo* alcanzó Júpiter y con él los 4 planetas descubiertos por el sabio en 1610.

[9]Arquímedes es uno de los "grandes" de la Matemática Pura y Aplicada. Universalmente conocido por sus contribuciones a la Mecánica, que se puede decir que fundó como ciencia teórica, y a la Hidrostática (principio de Arquímedes), fue también un genial matemático que aplicó su intuición mecánica a la Geometría e inventó el "método de exhaustión" para el cálculo de áreas y volúmenes limitados por figuras curvas; este método implica aproximaciones sucesivas y es precursor del concepto de límite que tardará 19 siglos en salir a la luz. Su cálculo del número π fue un récord durante muchos siglos. También invento una notación para los números muy grandes. La matemática griega tuvo una brillante rama aplicada a la Astronomía con Aristarco de Samos y Eratóstenes de Cirene.

da Vinci (1452-1519)[10] un siglo antes, pero la formulación de Galileo fue decidida y su propuesta fue puesta en práctica, pues sucedió en el contexto histórico adecuado; corroyó las bases del aristotelismo y la escolástica dominantes hasta entonces en el mundo intelectual. Dio fruto en breve tiempo y los científicos nos vemos reflejados en él.

De hecho, las filosofías son poca cosa si se quedan en palabras y polémicas, si no son llevadas a término. La gloria del siglo XVII reside en una serie de grandes filósofos-científicos (llamados en aquel entonces *filósofos naturales*), quienes, sin olvidarse de la metafísica, se lanzaron decididamente en pos del conocimiento de la Naturaleza y de la invención matemática: René DESCARTES estudió los principios del arte de razonar, así como la mecánica y el universo; ligó la geometría al álgebra y escribió *El Discurso del Método*[11]; Blaise PASCAL escribió sus filosóficas *Pensées* pero también investigó los principios de los fluidos (como la presión), la geometría, el cálculo y las probabilidades[12]. Y análogamente hicieron Pierre de FERMAT, Edmond HALLEY, Christiaan HUYGENS y Gottfried W. LEIBNIZ, un matemático, lógico y filósofo del mayor renombre.

Estamos ya listos para conocer a uno de los caracteres y de los momentos más cruciales en la historia de la ciencia. En efecto, el siglo alcanza su culminación con la figura de Isaac NEWTON (1642-1727), quien demuestra el éxito indiscutible de la propuesta de Galileo aplicada a la mecánica. Ataca los problemas básicos debatidos durante el siglo y

(i) concluye que el movimiento de cuerpos sólidos sigue una ley matemática simple que relaciona la segunda derivada del espacio (respecto al tiempo) con una entidad invisible *pero real*, la fuerza. En términos matemáticos, $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$;

(ii) al aplicar esta teoría a los cuerpos celestes, concluye que se mue-

[10] Los intereses de Leonardo, un genio verdaderamente universal, abarcan la pintura y la escultura, la ingeniería y la arquitectura, la física y las matemáticas. Científico y visionario, dibujó los planos de un objeto volante (el precursor del helicóptero) y acuñó el término turbulencia en los fluidos. He aquí una cita pertinente de Leonardo: *"Ninguna certeza existe donde no es posible aplicar la matemática o en lo que no puede relacionarse con la matemática"*. Por si quedaba duda de la opinión del gran hombre.

[11] *Le Discours de la Méthode*. Leiden. 1637, un trabajo importante en la historia de la ciencia. Su trabajo *Les Météores* es considerado el primer esfuerzo por poner el estudio del tiempo atmosférico sobre una base científica. Su más famoso dicho es sin duda el *"cogito ergo sum"*, *"pienso luego existo"*.

[12] Y se ocupó de construir una máquina de calcular de la que volveremos a hablar.

ven en sus órbitas de acuerdo con la ley de atracción universal. En fórmulas, $F = Gmm'/r^2$.

Isaac Newton

Para estudiar matemáticamente los movimientos resultantes de estas leyes, descubre lo que nosotros llamamos Cálculo Infinitesimal y resuelve las ecuaciones diferenciales. Es más, la formulación misma de sus leyes no es posible sin los nuevos conceptos tomados del Cálculo Diferencial e Integral, que lleva los nombres de Newton y Leibniz, y que fue inventado combinando las intuiciones de la mecánica y de la geometría[13].

En 1687, en que se publica su trabajo monumental, los *Principia*[14], la mecánica queda sólidamente fundamentada sobre las mismas bases que tiene hoy día. La matemática no es sólo una herramienta indispensable, en realidad *es el idioma en que se concibe y expresa la Ciencia*, ésta es la razón del título del libro. Desde ese momento, la descripción de la dinámica y la evolución de los sistemas mecánicos es una parte esencial de las matemáticas. Sigue un periodo de enorme desarrollo, durante el cual, la matemática intenta cumplir este nuevo papel fundamental.

Newton es considerado generalmente el científico más influyente en la historia de la humanidad[15]. Permítasenos aportar algunos datos adicionales para entender bien la grandeza de su legado. Podemos anotar a su crédito los fundamentos de la mecánica y la astronomía, del cálculo diferencial e integral y las ecuaciones diferenciales; pero también estudió la naturaleza de la luz, puso los fundamentos a la óptica y contribuyó con notables adelantos técnicos como el telescopio de refracción. Además de todo esto, estudió los fluidos que se llaman hoy día newtonianos, explicó y calculó el funcionamiento de mareas por medio de la atracción lunar, computó la velocidad del sonido (y también se interesó por la teo-

[13]Para situar a Newton en la perspectiva apropiada hemos de combinar su formación matemática con el conocimiento astronómico que heredó de Tycho Brahe, Johannes Kepler y Galileo.

[14]*Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, es decir, *"los Principios Matemáticos de la Ciencia"*.

[15]SIMMONS, J. *The scientific 100.* Citadel Press, Kensington Publ. Corp. Nueva York, 1996.

logía, la alquimia y la astrología, rasgo bastante común de esos tiempos que no debe extrañarnos en un gran científico)[16]. Su prestigio entre sus contemporáneos era enorme y los filósofos más brillantes del siglo XVIII (Hume, Kant, Voltaire[17]) estudiaron su trabajo y creyeron posible extender su fabuloso éxito a todos los campos de la filosofía, tarea que ha resultado ser de una dificultad extrema. De hecho, todavía estamos ocupados en ella.

La inmensidad de la tarea de entender la Naturaleza no escapó a una persona tan penetrante como Newton, con todo su éxito. Una de sus opiniones más famosas dice como sigue: *"I do not know what I will look like to others; to myself, I seem to have been only like a boy playing on the seashore, and diverting myself in now and then finding a smoother pebble or a prettier shell than ordinary, whilst the great ocean of truth lay all undiscovered before me".*

3. EL SIGLO DE LA RAZÓN Y DE LAS LUCES

Durante los tres siglos siguientes, una parte de ese océano se ha visto colmado de verdad, ciencia y matemáticas. La ciencia y la tecnología, bases de la Revolución Industrial, han progresado con las teorías, razonamientos y experimentos. Como consecuencia, la sociedad del siglo XX ha cambiado más radicalmente con respecto al siglo XVII que todo lo que había pasado en varios miles de años antes, desde el inicio de las grandes civilizaciones agrícolas. El confort de la casa, el transporte, y las comunicaciones, la salud del ciudadano actual, descansan sobre bases técnicas completamente desconocidas para las personas del Siglo XVII.

Quienes prefieran contemplar el panorama de las matemáticas actuales, al final del largo camino, son invitados a saltar las próximas 3 secciones y proceder con las matemáticas del siglo XX. Más aún, quienes quieran sólo asomarse al futuro harían bien en avanzar hasta la sección 7. Para quienes se interesan por qué pasó entre tanto, el relato continúa en el comienzo del siglo XVIII. Empezando con el ya citado Leibniz, gran filósofo y rival de Newton en la famosa y un poco triste

[16] *"From the same principles, I now demonstrate the frame of the System of the World".*

[17] Merece la pena recordar que los Principia fueron traducidos al francés por la amiga del último, la Marquesa de Châtelet, con su colaboración, en 1756. Mujer muy notable, la Enciclopedia Británica la describe como *"Gabrielle-Émilie Le Tonnelier du Breteuil, Marquise du Ch., French mathematician and physicist who was the mistress of Voltaire".* Sólo en el texto del artículo se entera uno de sus muchos logros.

"disputa del cálculo", una serie de brillantes matemáticos (diríamos mejor físico-matemáticos), como la familia Bernoulli, Euler, D'Alembert,... aprovecharon el potencial del nuevo cálculo y formularon matemáticamente todo tipo de problemas mecánicos: problemas de disparo, problemas sobre la caída de los cuerpos, sobre el movimiento de los fluidos, de vibraciones mecánicas, de minimización,...

Los métodos infinitesimales son igualmente poderosos en su aplicación a la geometría, una disciplina que vive en simbiosis íntima con la mecánica. Los sabios estudian el Cálculo de Variaciones, un nombre para el cálculo de valores mínimos de los llamados "funcionales" que florecerá en el siglo XX como un capítulo fundamental del Análisis Funcional, por entonces ni siquiera previsto. Jean Le Rond D'Alembert[18] estudió la vibración de las cuerdas y escribió la ecuación de ondas que lo llevó a descomponer una función en suma de ondas elementales, tarea también emprendida por Leonhard Euler (1707-1783), quien realizó la descomposición en suma posiblemente infinita de funciones sinusoidales. Euler es quizás el matemático más prolífico de la historia, hizo contribuciones fundamentales a la Geometría, el Análisis y la Teoría de Números, pero también a diferentes ramas de la Mecánica, la Elasticidad, la Hidrodinámica, la Acústica, y hasta la Música. Su latín no es difícil y sus libros de texto pueden leerse hoy con provecho y placer (¡preferentemente traducidos!). Vivió una gran parte de su vida en San Peterburgo, por lo que se le atribuye la fundación de la matemática rusa, junto con Daniel Bernoulli. El problema de las sumas infinitas preocupará a los matemáticos en el futuro próximo pero no en estos momentos de descubrimiento y euforia, y menos aún a L. Euler cuya intuición parece no tener límites.

Leonhard Euler

Algunas de las glorias y penas de la matemática como idioma de la mecánica pueden observarse en el estudio de los fluidos. Una teoría sistemática escapó incluso al genio de Newton. De hecho, el aspecto más difícil de esta teoría consiste precisamente en encontrar las hipótesis matemáticas justas que permitan construir un modelo matemático, es

[18]Representante muy conocido de la *Ilustración* francesa, quien combinó una brillante carrera matemática con la publicación de la famosa *Enciclopédie*, juntamente con D. Diderot. ¡No todos los matemáticos viven en una nube!

decir, matematizarla *tal como realmente es*[19]. Hacia el año 1738, Johann y Daniel Bernoulli establecen la ciencia teórica de la Hidrodinámica sobre la base idealizada de los llamados *fluidos perfectos*. El estudio fue continuado por Euler que escribe las famosas ecuaciones (1755)

$$\rho\,(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}) + \nabla p = 0, \qquad \nabla\cdot\mathbf{u} = 0,$$

(en la notación actual) cuya resolución analítica general ha resistido al paso del tiempo[20]. Es más, D' Alembert puso en evidencia las limitaciones de la idealización implícita en el concepto de fluido perfecto mostrando que un obstáculo sólido sometido a un "viento"perfecto no sufriría ningún *arrastre* neto y ninguna *sustentación* neta.

Pierre S. Laplace

Esta dificultad nos devuelve al problema filosófico original, el papel de las matemáticas. De hecho, la dificultad se origina porque la mecánica teórica no trata de la Naturaleza, que escapa en su más pura esencia a nuestra curiosidad, sino que trata más bien del **modelo matemático** que nosotros nos podemos formar de ella. La concordancia experimental nos permite confirmar que una teoría es buena como modelo del mundo físico, pero nunca que es un modelo perfecto[21]. La modelización matemática es un aspecto fundamental de la matemática actual y clave de su posible utilidad.

A pesar del fracaso relativo con los fluidos, cuando termina el Siglo de las Luces una sensación de optimismo invade las mentes de los mejores matemáticos - mecánicos, como son Joseph Louis Lagrange, autor de la *Mécanique analytique*[22], y Pierre Simon Laplace. El último publica su monumental libro *Mécanique céleste* (1788). Es también autor de la *Théorie Analytique des Probabilités* (1812), una de las más importantes referencias en el desarrollo de la teoría de las probabilidades. La ecuación

[19]Recordemos aquí el dicho de Newton sobre su mecánica: *Hypotheses non fingo*, yo no me invento las hipótesis o axiomas.

[20]Guardan su misterio aún hoy día: la existencia de soluciones clásicas dados datos iniciales regulares en 3 dimensiones espaciales es todavía un problema abierto.

[21]Volveremos a este asunto al hablar de Einstein.

[22]Que describe las ecuaciones generales del movimiento, llamadas ecuaciones de Lagrange.

de Laplace, $\Delta\mathbf{u} = 0$, es una de las más famosas de la Física[23]. Basándose en sus estudios mecánicos pensó que el universo funciona como un reloj (determinismo) y declaró que los problemas matemáticos más importantes estaban ya propuestos y resueltos, o a punto de ser resueltos en un corto tiempo. Afortunadamente, la Historia demostraría que el gran hombre erraba en este tema. ¿No recuerda ésto algunos recientes y acalorados debates sobre el fin de la Física o de la Historia?

4. EL SIGLO XIX, EL GRAN SIGLO DE LA CIENCIA

La contribución del siglo XIX a la Matemática, tanto pura como aplicada, es sorprendente por su novedad, por lo inesperado de su evolución y por su riqueza y amplitud de temas. Empecemos por las matemáticas que vinieron de la física.

• **La electricidad y el magnetismo:** De Michael Faraday a J.C. Maxwell, experimentos y leyes parciales cubren un camino que cuenta con los nombres de Gauss, Ampère, Oersted, Biot, Savart, Lenz,... hasta llegar al (impresionante) sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales que relaciona los campos eléctricos y magnéticos (1863), obra cumbre de James Clerk Maxwell[24]. Las ecuaciones de Maxwell (que no detallaremos en este momento por su complejidad, aunque sin duda merecen lugar de honor en este texto) son uno de los logros mayores de la Matemática en el siglo XIX. Gracias a James Maxwell, una nueva rama de la ciencia, cuya existencia era insospechada un siglo antes, alcanzó el nivel de perfección matemática que Newton había otorgado a la mecánica. La teoría electromagnética tendrá profundas repercusiones no sólo sobre las ecuaciones diferenciales y el análisis funcional, sino además sobre la naciente topología (a través de conceptos como la homología)[25]. Elaborando las ecuaciones

James C. Maxwell

[23]Los ingenieros y científicos aplicados usan la transformada de Laplace.

[24]Publicación en forma final como *Treatise on Electricity and Magnetism*, 1873.

[25]Maxwell es considerado el físico teórico más importante del siglo XIX; Einstein opinaba que el trabajo de Maxwell representó la revolución más significativa en el estudio de la física desde Newton. La teoría de propagación de ondas es hoy día

de Maxwell se llega a la ecuación de ondas, que es la herramienta que nos permite describir la propagación de los fenómenos electromagnéticos en forma de ondas, caracterizadas por tres parámetros: primero, la amplitud A; segundo, la velocidad, c, que depende del medio (y es por consiguiente constante en el vacío); tercero, la frecuencia de oscilación, ω, que es una cantidad que varía con el tipo de onda. En breve, y para una dimensión espacial, la ecuación y su solución se escriben

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \quad \Rightarrow \quad u = A\cos(kx - \omega t + \phi),$$

donde u es la intensidad de la oscilación, $k = \omega/c$ se llama número de onda y ϕ es una constante, la fase, de la que no debemos preocuparnos por ahora, y los subíndices indican derivadas parciales. Pero veamos, ¿es tan necesaria esta fórmula para proceder? La respuesta es que sí, pues poco después, y como reflejo de la generalidad del parámetro ω en el modelo matemático, Heinrich R. Hertz predice y descubre las ondas electromagnéticas fuera del rango visible (las ondas de radio, 1888), y Guglielmo Marconi descubre la telegrafía sin hilos, es decir, la radio (1895), introduciéndonos así al mundo de las comunicaciones que son el alma del siglo XX. Y otra gran sorpresa: aparece una incompatibilidad con la mecánica de Newton sobre la que hablaremos en un momento. Quede dicho esto sobre las consecuencias de la formulación matemática en la evolución de la ciencia.

• **Los fluidos reales**, de Claude Louis Navier a George Gabriel Stokes, 1821 a 1856 y después. Las ecuaciones de Navier-Stokes describen los fluidos reales y gobiernan el comportamiento de los fenómenos atmosféricos (el clima, la Meteorología, la Hidrología, la futura Aeronáutica). La formulación correcta de las ecuaciones que describen el movimiento de los fluidos reales tardó por consiguiente unos 180 años tras los esfuerzos de Newton, las matemáticas profundas no se hacen en dos días. Una serie de brillantes matemáticos figuran entre los modelizadores, como S. Poisson y J. C. Saint Venant, así como el médico J. L. M. Poiseuille, que investigó el flujo sanguíneo. Lord Kelvin y H. Helmholtz ponen las bases para el estudio matemático de la vorticidad y los torbellinos. La comprensión matemática de los fluidos turbulentos, ya mencionados por Leonardo, es *todavía un problema abierto.*

---

una de las ramas clásicas de la matemática aplicada, en sus múltiples variantes. Matemático excelente, Maxwell era defensor del método probabilístico en la Ciencia, que él aplicó al estudio de gases (distribución de Maxwell) y se le atribuye la frase: *"la verdadera lógica del mundo es el Cálculo de Probabilidades"*.

Para no alargar excesivamente nuestro texto mencionaremos sólo dos teorías físicas más de gran importancia y repercusión matemática:

• **La Termodinámica**, que estudia los intercambios de calor, adquiere una fundamentación matemática sólida con James JOULE, Saadi CARNOT, J. R. MAYER,... Tiene una profunda repercusión sobre el cálculo en derivadas parciales y el concepto de diferencial exacta. Esta teoría incluye la famosa Segunda Ley de la Termodinámica (la ley del crecimiento de la entropía en el Universo), una ley fundamental en la ciencia. Mientras que su declaración matemática es simple, su interpretación práctica tiene implicaciones profundas que ocupan a generación tras generación de estudiosos[26].

• Por último, mencionemos la **Mecánica Estadística**, asociada a los nombres de Maxwell, L. BOLTZMANN y W. J. GIBBS, que tallaron toda una rama de la Física Matemática basada en el Cálculo de Probabilidades, rama de las matemáticas que había permanecido un tanto al margen de esta aventura científica[27]. Esta idealización matemática del azar había sido elaborada en el fabuloso siglo XVII (ca. 1650) por B. Pascal, P. Fermat y C. Huygens para comprender los juegos de azar, y avanzada luego por BUFFON, BERNOULLI, DE MOIVRE y Laplace entre otros. De repente, el concepto de probabilidad cobra vida para la ciencia física a la hora de modelar el comportamiento de cantidades enormes de partículas[28]. Veamos por qué: las partículas están sujetas evidentemente a las leyes de la mecánica de Newton. Pero, dado que hoy se sabe que el número de moléculas de un gas por litro alcanza la fantástica cifra de $2,69 \times 10^{22}$ en condiciones normales (0^o C de temperatura y 1 atm. de presión)[29], es del todo imposible seguir sus trayectorias individuales. La mecánica estadística propone un comportamiento medio con efectividad

[26] Con consecuencias insospechadas: la entropía es hoy día un concepto central en la Teoría de Información tras el trabajo de C. Shannon, *"The mathematical theory of communication"*, Bell Syst. Techn. Journal **27**. 1948. Págs. 379-423, 623-658.

[27] La tumba de Boltzmann en el cementerio central de Viena tiene como ornato su famosa fórmula de la entropía en mecánica estadística, $S = k \log W$, que puede considerarse una gesta del espíritu puro en la búsqueda de la comprensión de los secretos de la Naturaleza. El libro de Gibbs, *Elementary Principles in Statistical Mechanics*, publicado al final de su vida en 1902, jugó para la física estadística un papel similar al de Maxwell para el electromagnetismo.

[28] Este no era un paso trivial. Boltzmann contó para ello con su creencia en la existencia de los átomos, que encontró fuerte resistencia en el momento por parte de científicos famosos como E. Mach. ¡Y estamos a finales del siglo XIX! La agria controversia afectó seriamente a la salud de Boltzmann.

[29] En los libros de química suele mencionarse la cantidad de átomos por cada mol = 22,4 l de gas, el llamado número de Avogadro, $6,022 \times 10^{23}$.

sorprendente: de ella es inmediato predecir la relación de la temperatura con la energía y la presión para un gas perfecto, ¡y la predicción ideal resulta ajustada a los datos experimentales! La distribución de Maxwell-Boltzmann, $n = Ae^{-E/kT}$, es un objeto matemático que tiene en mecánica estadística un papel tan importante como la distribución gaussiana en la ciencia estadística usual.

BERNHARD RIEMANN

Cambiemos de escena para retratar a otro de nuestros héroes, una "vida ejemplar". Bernhard RIEMANN (1826-1866) es una de esas figuras sorprendentes cuya obra contiene lo mejor de la matemática pura y aplicada. El gran matemático alemán, muerto joven, es bien conocido como un gigante de la matemática más pura. Nos legó la hipótesis sobre los ceros de la "función zeta" (*Hipótesis de Riemann*) cuya demostración es quizá el problema abierto de las matemáticas más famoso al entrar el siglo XXI, tras la reciente resolución de la conjetura de Fermat. La hipótesis de Riemann afirma que las soluciones (o ceros) interesantes de la ecuación $\zeta(s) = 0$, están situadas sobre una misma línea recta en el plano complejo, precisamente la de ecuación $Re(s) = 1/2$. Esto se ha verificado para las primeras 1.500.000.000 soluciones[30]. Una prueba de que el aserto es verdad para toda solución aclararía muchos misterios, desde la distribución de números primos a cuestiones de física teórica. Riemann fue un investigador de mente geométrica que ligó la suerte del análisis complejo a las transformaciones conformes y pensó en los espacios generales de varias dimensiones definidos a partir de su geometría local[31]. Hoy día, llamamos a esas *geometrías riemannianas* y son la base a partir de la cual se construye la física teórica.

Pues bien, el mismo Riemann estudió la propagación de gases compresibles y llegó a la conclusión de que el modelo matemático[32], entendido en el sentido de las soluciones clásicas, era contradictorio (porque

[30]Para los curiosos de las fórmulas, $\zeta(s) = 1 + 1/2^s + 1/3^s + \cdots$.

[31]Su famoso artículo *"On the hypotheses which lie at the foundations of Geometry"*, 1854. En alemán *"Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen"*, 1854, publicado en 1868.

[32]Un sistema de ecuaciones en derivadas parciales no lineal de tipo hiperbólico, para quien desee el detalle.

preveía líneas características que se cortan, y sobre las cuales, las variables físicas - densidad, presión y velocidad - tomarían valores distintos simultáneamente). Sin embargo, aventuró que la teoría era correcta si *se cambiaba radicalmente el punto de vista* y se admitían como soluciones de una ecuación diferencial funciones que no sean derivables, ni siquiera continuas. Ante tal atrevimiento, tan típico de las mejores matemáticas de los siglos XIX y XX, recordamos de nuevo a Newton: Riemann no se inventaba esa teoría. La teoría de las *ondas de choque* es hoy día un tema fundamental de la dinámica de gases y de su aplicación a la aeronáutica, y es por ello una de las áreas más activas de investigación matemática en ecuaciones en derivadas parciales, ... y de la ingeniería.

La Evolución Interna

Pero, incluso tras el elogio de Riemann, esta visión sería totalmente injusta si no tuviera en cuenta la evolución interna de las matemáticas, que habían llegado a un alto nivel de madurez tras 300 años de intenso desarrollo. Solo comentaremos aquí muy brevemente este importante capítulo, pues es más conocido por el público matemático. Varios son los temas estrella, tan inesperados como cargados de futuro: geometrías no euclídeas de J. C. F. Gauss[33], Janos Bolyai y N. I. Lobachevski, fundamentación del cálculo infinitesimal de Augustin L. de Cauchy, la teoría de funciones de Karl Weierstrass, la lógica matemática de George Boole, la teoría de conjuntos de Georg Cantor, por citar sólo un nombre al lado de cada gran capítulo[34].

Existen campos de investigación en que las matemáticas toman claramente el relevo a la física en la tarea de extraer el jugo de un concepto. Esto sucede con el problema de representación de una función como una suma de funciones simples, resuelto por Brook Taylor y Colin McLaurin para las sumas de potencias y planteado por Daniel Bernoulli (1753) y Leonardo Euler para las sumas trigonométricas que aparecen en las ecuaciones de ondas y el calor. Es gracias a la insistencia de Joseph Fourier (1822)[35] que los matemáticos se adentran en la aventura de

[33]El "Príncipe de los Matemáticos", quizá el matemático más sobresaliente y conocido de la historia. Hizo contribuciones fundamentales a la teoría de números, al álgebra, a la geometría diferencial, a la geometría no euclídea; la distribución más popular de probabilidad lleva su nombre, así como uno de los teoremas de integración más famosos de la física matemática.

[34]Queremos dejar constancia expresa de la incomodidad que nos causa pasar tan de prisa por temas tan importantes de la Matemática, sin los que muchas de las páginas que seguirán no tendrían sentido.

[35]Escrito de 1807, memoria presentada a la Academia de Ciencias de París y publicada en 1822.

dar un sentido riguroso a las sumas infinitas de funciones trigonométricas generales

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \cos(\omega x) + b_n \sin(\omega x)\}.$$

Carl F. Gauss

Joseph Fourier

Éste es el origen de un área mayor de la teoría de funciones, conocida como Análisis de Fourier. La tarea estaba cargada de grandes dificultades y tuvo grandes éxitos. Así, cuando Paul du Bois Raymond construyó (1873) una función real continua y periódica cuya serie de Fourier no converge puntualmente, parecía que algo iba realmente mal en el análisis matemático de los fenómenos oscilatorios. Tras cuidadoso examen, tres opciones se planteaban al investigador:

(i) modificar la noción de función,

(ii) modificar la definición de convergencia,

(iii) reemplazar la base de senos y cosenos por candidatos mejores.

Es mérito notable de la comunidad matemática que *los tres caminos* hayan sido explorados con éxito asombroso[36]. El teorema fundamental de sumación de series de Fourier se debe a L. Carleson, 1966[37], y necesita útiles como *la convergencia en casi todo punto*, los espacios L^2 y la maquinaria del análisis del siglo XX.

[36] He aquí dos citas de Fourier para animar el debate sobre Matemática Pura contra Aplicada: La primera es *"Las ecuaciones del diferencial de la propagación de calor expresan las condiciones más generales, y reducen las preguntas de la física a problemas de análisis puro, y éste es el objeto apropiado de la teoría"*. Ahora la segunda: *"El estudio profundo de la naturaleza es la fuente más fecunda de descubrimientos matemáticos"*.

[37] *"On convergence and growth of partial sums of Fourier series"*. *Acta Math.* 116. 1966. Págs. 135–157.

El Contexto Social

Es interesante decir dos palabras sobre la evolución social de la ciencia en el siglo XIX. Éste es el siglo en que las revoluciones industrial, burguesa y democrática se asientan en Europa trayendo consigo la extensión de los estudios científicos e industriales tanto en universidades como en otros centros especializados[38], con lo que aumenta exponencialmente el cuerpo de profesores investigadores. Los avances son tan impresionantes que el final de siglo vuelve a encontrar a los matemáticos en franco optimismo, si uno se fía de la historia escrita por el geómetra alemán Felix KLEIN[39]. Otra característica de este período es la profunda separación que se manifiesta entre matemáticos, físicos e ingenieros, consecuencia del enorme crecimiento de sus campos de estudio. Tal separación, a veces divorcio, tendría consecuencias profundas sobre la evolución de las matemáticas en el siglo XX, e incluso sobre el mismo concepto de matemática.

5. UN CAMBIO DE SIGLO REVUELTO

En todo caso, el cambio de siglo es espectacular tanto en física como en matemáticas. En éstas aparecen en el firmamento figuras extraordinarias como Henri POINCARÉ (1854-1912) y David HILBERT (1862-1943), que marcarán profundamente las matemáticas del siglo XX. Pero una gran parte del brillo en retrospectiva se debe a que el cambio de siglo fue una *época de crisis*, pues las evidencias de fenómenos fuera del gran esquema se acumulaban.

• El experimento de Michelson-Morley (1887) prueba que la velocidad de la luz es efectivamente constante (independientemente del sistema de referencia inercial), como predecía la teoría ondulatoria basada en las ecuaciones de Maxwell. El modelo mecánico del mundo de Euclides-Newton tiene por primera vez una gran grieta.

• La observación de las partículas suspendidas en los gases revela un movimiento altamente irregular, el movimiento browniano (Robert BROWN, 1827). Este es un golpe para la geometría de Euclides basada

[38] Muchas de las Escuelas de Ingenieros se fundan en España en esa época, como las de Montes y Caminos en 1834.

[39] *Lectures on the development of mathematics in the 19th century.* He aquí una cita de Klein: *"los grandes matemáticos como Arquímedes, Newton o Gauss siempre unieron teoría y aplicaciones en igual medida".*

en puntos, rectas y curvas regulares (al menos regulares a trozos).

Henri Poincaré

David Hilbert

• Las sorpresas de la teoría de funciones llevan a la teoría de conjuntos (Georg Cantor), que junto con la lógica (George Boole, Gottlob Frege, Giuseppe Peano) son la base de un intento de fundamentar las matemáticas rigurosamente de una vez por todas. Las matemáticas proponen a la ciencia los conceptos de teoría *coherente*[40] y *completa*. Surgen las escuelas y las disputas: logicismo (Alfred N. Whitehead y Bertrand Russell[41]), intuicionismo (Luitzen Brouwer) y formalismo (David Hilbert). Las paradojas (de Russell, de Burali-Forti, de Richard) siembran un caos notable en los espíritus menos fuertes.

• No existen útiles analíticos ni computacionales para abordar las complejidades de las ecuaciones de los medios continuos, como los fluidos. En consecuencia, las matemáticas prácticas de la ingeniería se sumen en una serie de aproximaciones y recetas que las divorcian de la teoría.

• Pero, incluso, el tema clásico de la integración general de las ecuaciones del movimiento para tres o más cuerpos celestes se muestra imposible[42]. A grandes males, grandes remedios: H. Poincaré propone los métodos cualitativos y abre las puertas a la geometría algebraica y la topología (llamada entonces *Analysis Situs*, 1895). Pero al tiempo, descubre con sus métodos teóricos una tremenda complejidad escondida en el modelo matemático (que son los sistemas dinámicos). Uno de estos

[40] *consistent* en inglés.

[41] su famoso libro *Principia Mathematica* data de 1910.

[42] como expone H. Poincaré en su libro *Méthodes nouvelles de la mécanique céleste.* París, 1899.

monstruos son las órbitas homoclínicas que sembrarán de *caos* la mecánica celeste cuando Poincaré sea bien comprendido (lo que llevó bastantes décadas). Para mejor medir la estatura de nuestro héroe valga la siguiente cita: *"en sus cursos en la Facultad de Ciencias de París desde 1881, y de la Sorbona desde 1886 Poincaré cambiaba de tema cada año, tocando la óptica, la electricidad, la astronomía, el equilibrio de los fluidos, la termodinámica, la luz y la probabilidad"*.

• Agreguemos algunas notas más optimistas. Así, la teoría de la integración de funciones se ve coronada por los trabajos de E. Borel y H. Lebesgue[43]. En adelante el cálculo posee un concepto de integral (la integral de Lebesgue) donde el proceso de tomar límite es natural, el análisis funcional puede crecer (espacios de Hilbert) y el famoso problema de Dirichlet[44] tiene solución (en un sentido aún visto como raro). El precio a pagar es la construcción de una teoría matemática sofisticada que los estudiantes de ciencias e ingeniería deben estudiar y absorber, o al menos han de aprender a convivir con ella[45].

• Descubrimientos importantes de naturaleza matemática ocurren en otras ciencias y darán fruto en el próximo siglo. El Científico ruso Dmitri Mendeleyev encontró el orden en el caos de los elementos químicos y propuso la Tabla Periódica en 1869, que es hoy día la base del tratamiento físico-matemático de la Química. Por otro lado, el monje, botánico y experimentador de las plantas austriaco, Gregor J. Mendel formuló las leyes racionales de la herencia, poniendo así los fundamentos matemáticos de la ciencia de la Genética[46].

6. EL SIGLO XX, UN SIGLO DE MARAVILLAS

A estas alturas, esperamos haber comunicado al lector la impresión de la profunda simbiosis de la Matemática con la Física, de sus sorprendentes y en muchos casos inesperadas interacciones. La historia de tal simbiosis incluye ya aplicaciones tecnológicas avanzadas, preludio de lo que será el nuevo siglo. La explosión de la Matemática y la Ciencia en el siglo XX hace aconsejable reducir nuestro texto a algunos de los temas

[43] La importantísima contribución a la teoría de la integración figura en su tesis doctoral, *Intégrale, longueur, aire.* Universidad de Nancy, 1902.

[44] Nombrado en honor a P. L. Dirichlet, el primero que probó que la serie de Fourier converge bajo ciertas condiciones

[45] parafraseando a J. von Neumann. *"Ad astra per aspera"*, dice el adagio latino.

[46] *Versuche über Pflanzenhybriden*, (*"Experimentos con híbridos de plantas"*), publicado en 1886.

más importantes. Un rasgo sobresaliente es la matematización progresiva de las demás ciencias, que aparecen ya como nuevos horizontes para la Matemática Aplicada.

Nuevas matemáticas que nos llegaron de la Física

El comienzo del siglo XX es testigo de dos grandes revoluciones en la manera de concebir el mundo físico, que cambiaron de forma radical el "universo newtoniano". Comprobado el hecho de que la luz no se comporta como era esperado, la teoría que lo explica trae consigo consecuencias dramáticas sobre nuestro concepto de espacio-tiempo, que afectan en la práctica a la Astronomía y al comportamiento de las partículas que se mueven deprisa. Por otra parte, en el extremo de lo muy pequeño, se observó que los átomos, moléculas y partículas subatómicas tampoco obedecen a las leyes de comportamiento tan cuidadosamente observadas por los entes macroscópicos, aunque por otras razones. Son *dos grandes revoluciones cuya más íntima esencia se expresa en fórmulas matemáticas*. Examinemos con algún detalle el surgir de ambas teorías.

• **La Teoría de la Relatividad**. Albert Einstein, el Hombre del Siglo según *la revista Time* (año 2000), propuso las dos versiones de la relatividad: en 1905[47] (la relatividad especial) y en 1916 (la relatividad general). Esperamos no sorprender al lector al afirmar que en ambos casos se trata de una profunda reflexión sobre las matemáticas que sirven de base a la Física.

La relatividad especial tiene como precursores a Lorentz, Poincaré y Minkowski, que estudiaron el grupo de invariancia que corresponde a la nueva geometría del espacio-tiempo. La relatividad general usa los conceptos geométricos que Riemann elaboró más de un siglo antes como un puro *Gedankenexperiment*, es decir, experimento mental, sobre las "hipótesis que subyacen a los fundamentos de la geometría", y que fue desarrollado por la escuela de geometría diferencial italiana de Ricci, Levi-Civita y Bianchi. La relatividad será un gran campo de juego de la geometría diferencial en el siglo XX. De las ecuaciones de Einstein se llegará al Big Bang y a los agujeros negros (Oppenheimer y Snyder, 1939; Penrose y Hawking). Todo un ejercicio de matemática pura como modelo de una rama de la física.

[47] 1905 fue el *annus mirabilis* para Einstein. En tres artículos separados explicó el efecto fotoeléctrico, el movimiento browniano y la teoría de la relatividad. Es improbable que tal hecho vuelva a repetirse.

Albert Einstein

Conviene, sin embargo, no olvidar la otra cara de la Relatividad: desde la primera confirmación experimental de Lord A. Eddington en 1919, incesantes experimentos han servido para confirmar (mejor diríamos, con la modestia de Einstein, no refutar) la teoría de la Relatividad. Pues en la ciencia real no se inventan las hipótesis[48].

Hagamos una pausa para echar una mirada a algunas de las fórmulas principales. En septiembre de 1905, Einstein publicó un corto artículo en que demostró la fórmula fundamental $E = m\,c^2$ sobre la equivalencia matemática de masa y energía, que se ha convertido en un clásico de la cultura popular del siglo XX. Por otro lado, las leyes de transformación de la Relatividad Especial, que reemplazan a las leyes de transformación galileanas a velocidades relativas altas, conocidas como las leyes de transformación de Lorentz, son :

$$x = \gamma x' + \gamma v t', \qquad t = \gamma t' + \frac{v}{c^2}\gamma x',$$

donde la constante γ se llama factor de dilatación del tiempo. Depende de la velocidad relativa v y viene dado por la expresión: $\gamma = 1/\sqrt{1-(v^2/c^2)}$. Por consiguiente, la suma de velocidades sigue la sorprendente regla

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}},$$

muy en contra de lo que estamos acostumbrados a creer (es decir, $u = u' + v$).

[48]He aquí una opinión significativa de Einstein sobre las matemáticas: *"Mathematics deals exclusively with the relation of concepts to each other without consideration of their relation to experience. Physics too deals with mathematical concepts; however, these concepts attain physical content only by the clear determination of their relation to the objects of experience"*, de *The theory of Relativity*, 1950. Las opiniones de Einstein son tanto más interesantes si se tiene en cuenta que, contrariamente a otras grandes figuras en la historia de la Física, como Newton o Maxwell, no fue matemático excepcional, por lo menos técnicamente. Dejó, sin embargo, un legado impresionante a las matemáticas a través de sus teorías.

La fórmula más conocida de Einstein es sin duda $E = m\,c^2$, que forma con la fórmula cuántica de Planck, $E = h\,\nu$, toda una nueva visión de la energía al principio del siglo. La energía había sido uno de los conceptos clave de la evolución de la física y las matemáticas que la acompañan en el siglo XIX, y se ve sometida a profunda revisión matemática en los comienzos del siglo XX. Precisamente, los *quanta* (o cuantos) son nuestro próximo tema.

• **La Mecánica Cuántica** describe el comportamiento de la materia y la luz a la escala atómica. En palabras del gran físico R. Feynman, *"Things on the very small scale behave like nothing you have any direct experience about"*. En particular, asistimos a otra enorme brecha en el, hasta entonces, perfecto edificio de la mecánica newtoniana. El segundo recorrido mágico[49] del comienzo del siglo XX nos lleva de la hipótesis de los quanta de Max Planck, 1900, a la ecuación de Schrödinger (1926) pasando por N. Bohr, L. De Broglie, W. Heisenberg y P. A. M. Dirac. El acceso al mundo atómico queda codificado en la maravillosa ecuación

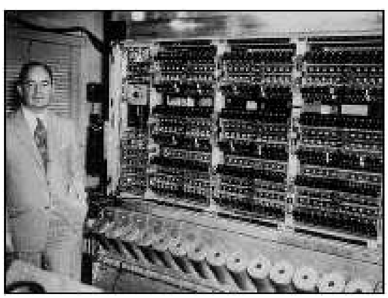
$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + V(x,y,z,t)\psi,$$

donde $\hbar$ es la constante de Planck reducida, $\hbar = h/2\pi$, $i = \sqrt{-1}$, Δ es el operador laplaciano y $V = V(x,y,z,t)$ es el potencial. Todo ello parece realmente un trozo de la Cábala, y en el momento inicial se dudaba de qué representaba exactamente la variable $\psi(x,y,z,t)$ llamada "función de onda". Tal es el poder de la Matemática, estos físicos geniales habían encontrado un trozo del Código Matemático del Universo pero aún habían de interpretar qué significaban las variables. En 1928, Max Born propuso la interpretación probabilista, donde $|\psi(x,t)|^2$ es la densidad de probabilidad de encontrar la partícula en el lugar x en el instante t, y aunque es mayoritariamente admitida, hay quienes se resistieron, siguiendo a Einstein en eso[50]. Porque la Mecánica Cuántica es un desafío fundamental a la manera previamente admitida de mirar el mundo, al determinismo tradicional y a la causalidad. Se puede decir que el determinismo está basado en el supuesto de que "el conocimiento exacto del presente permite calcular el futuro". ¿No es ése el sueño de las ciencias exactas, y no es cierto que la Mecánica Cuántica subvierte esa creencia? Ponderando el problema, W. Heisenberg encontró en 1927 la respuesta siguiente: *"no es la conclusión [de la hipótesis determinista] lo que es falso, sino la hipótesis inicial"*.

[49] Cita homenaje a *"The Magical Mystery Tour"*, Lennon y McCartney, 1967.

[50] Suyo es el famoso comentario: *"God does not play dice"*, "Dios no juega a los dados".

Dejando al lado el mundo de las interpretaciones, debemos informar que esta teoría, aun estando basada en el más alto nivel de abstracción matemática, es confirmada por todo un siglo de experimentos. La parte mágica, que tanto abunda, tiene un momento estelar cuando Dirac, usando la formulación relativista, propone la existencia de los positrones (1932) porque *"las ecuaciones admiten el cambio de signo con respecto a la solución que describe el electrón"*,...y el positrón fue debidamente descubierto[51] por los físicos experimentales poco después (Anderson y Blacket, 1932-33). Dirac predijo la existencia del antiprotón que fue confirmado por Segrè en 1955, y también el monopolo magnético, pero esta vez su existencia ha quedado sin confirmación hasta el momento presente. Las predicciones de Dirac son un ejemplo notable, de ninguna manera único, en que el modelo matemático va delante de la evidencia experimental[52]. ¿No nos recuerda todo esto a Hertz?



J. V. NEUMANN

La cosecha matemática de la Mecánica Cuántica no es escasa: la teoría de operadores autoadjuntos en espacios de Hilbert con su correspondiente teoría espectral son desarrolladas por John VON NEUMANN (Janos v. N., 1903-1957), uno de los genios más polifacéticos del siglo[53], con el objeto de dar sentido a los operadores que aparecen en la ecuación, operado-

[51] ¿O deberíamos decir mejor "encontrado" o "reconocido"?

[52] Por otro lado, la ciencia basada solamente en argumentos o analogías matemáticos puede ser mala ciencia. Un ejemplo: existe una tendencia matemática a afirmar que en el reino de partículas ciertas simetrías matemáticas son "ley" de la naturaleza. En particular, debería ser entonces correcta la ley de conservación de la paridad, que especifica que las partículas elementales y sus imágenes especulares *deben* comportarse idénticamente; en 1956-57, tres chino-americanos T. D. Lee, C. H. Yang, y C. S. Wu conjeturaron primero y probaron después que hay procesos subatómicos que violan esa ley.

[53] J. von Neumann, *Mathematische Grundlage der Quantenmechanik, "Fundamentos Matemáticos de la Mecánica Cuántica".* Springer, 1932. La trayectoria de Von Neumann recorre las áreas más diversas de la Matemática pura y aplicada: en su juventud modificó el sistema Zermelo-Fraenkel de la teoría de conjuntos, creó las álgebras de v.N. en teoría de operadores, es el padre de la Teoría de Juegos y lo veremos luego en el Instituto para Estudios Avanzados de Princeton como uno de los padres del primer gran ordenador moderno. Después de la guerra se ocupó de la hidrodinámica, de los métodos numéricos (Monte Carlo, estabilidad para los esquemas en diferencias finitas), la teoría de autómatas, y así sucesivamente.

res laplacianos y demás. Su teoría se basa en el trabajo precursor de S. BANACH y los expertos italianos en cálculo de variaciones, pero la Mecánica Cuántica tiene sus caprichos: necesita unos objetos de la segunda generación, los "operadores lineales no acotados en espacios de Hilbert". Estamos, pues, en el borde o más allá de los temas de la licenciatura en Matemáticas, lo cual es información interesante para quienes sostenían *que toda matemática útil ha de ser muy fácil*[54]. Junto con el Cálculo de Variaciones, la Mecánica Cuántica ha sido cantera inagotable de problemas para el Análisis Funcional, rama de las matemáticas que toma vuelo propio.

Por otra parte, el comportamiento anómalo de las partículas cuánticas respecto a las clásicas tiene aspectos matemáticos simples y relevantes, como su distinto comportamiento estadístico, que lleva a las distribuciones de Bose-Einstein y Fermi-Dirac que "corrigen" a Maxwell-Boltzmann.

Las matemáticas que vinieron de la ingeniería

• **La Aeronáutica**. Tras los impresionantes avances de la física matemática del siglo XIX y en particular de la mecánica de fluidos, pudiera parecer que un problema antiguo como el del vuelo, que ya había ocupado a Leonardo da Vinci, debería estar resuelto. Y los experimentos con globos habían tenido éxito un siglo antes[55]. Además, la teoría de la variable compleja y de los flujos potenciales y vorticosos había obtenido un notable progreso. Pero con todo este progreso, el vuelo propulsado (por un motor) no era entendido ni practicado, y un desanimado Lord Kelvin reconocía a finales de siglo XIX que el sueño del vuelo propulsado era quizá imposible[56]. Es entonces cuando *el método experimental es reivindicado* por los hermanos Wilbur y Orville WRIGHT, fabricantes de bicicletas y consumados experimentadores, que logran volar en un artefacto propulsado en las inhóspitas playas de Kitty Hawk, Carolina del Norte, en la desapacible mañana del 17 de diciembre de 1903. Es el nacimiento de la Aeronáutica. La reacción de los teóricos fue fulminante y a la altura del desafío. Durante el periodo 1905-10, los principales ingre-

[54] Me refiero en particular a las opiniones del famoso matemático inglés G. H. Hardy en su libro *A Mathematician's apology*, Cambridge University Press, Cambridge, 1940, que refleja puntos de vista muy distintos de los sostenidos en este artículo, ver especialmente la sección 26. Es un libro muy conocido y de un gran interés. El tiempo no parece haberle dado la razón en el tema que nos ocupa. Debe tenerse en cuenta que en 1940 la relevancia práctica de las teorías sofisticadas como la Mecánica Cuántica podía muy bien no ser evidente, como lo es hoy para el lector avisado.

[55] Hermanos Montgolfier, 1783.

[56] *"heavier-than-air flying machines are impossible"*, dijo en 1895.

dientes matemáticos que faltaban al modelo teórico fueron comprendidos (N. E. Zhukovski, M. Kutta, L. Prandtl, S. A. Chaplygin). Se trata de los conceptos de sustentación, circulación, capa límite, separación, régimen laminar y turbulento. Una ingeniería nace y nos llevará en 30 años más allá de la barrera del sonido. Y nacen ramas de la matemática aplicada, como la teoría de las perturbaciones singulares, la teoría de los flujos supersónicos y transónicos y la teoría matemática de la combustión[57].

Resistimos aquí la tentación de detallar las otras ramas de la ingeniería que también han tenido una interacción activa con las matemáticas. Lo cual no significa en absoluto que ignoremos su importancia, trataremos el tema en la sección 8.

Grandes novedades que vinieron de las matemáticas

Las matemáticas han vivido el siglo XX muy pendientes del desarrollo interno de las ideas recibidas del fabuloso siglo anterior. Para más fortuna, el siempre difícil y en general fallido intento de prever las líneas del futuro contó con una confirmación en la famosa propuesta de D. Hilbert al II Congreso Internacional de Matemáticos, celebrado en París. En 23 problemas, Hilbert resumía los principales retos con que se enfrentaban las matemáticas, desde las más puras a la física matemática[58]. Esos 23 problemas han sido de gran importancia en el transcurso de los años, pero otras líneas inesperadas han venido a complementarlos y competir por las candilejas. Señalemos tres desarrollos importantes entre tantos.

• **El cálculo de probabilidades**. Como respondiendo a la necesidad planteada por la mecánica cuántica, pero en realidad independientemente, Andrei N. Kolmogórov estableció en Moscú la probabilidad axiomática[59] sobre la teoría de conjuntos y la teoría de la medida, tarea a la que se asocian los nombres de P. Lévy en Francia y N. Wiener

[57] Más hacia la matemática teórica tenemos la teoría matemática de la explosión para las ecuaciones diferenciales no lineales, de tanta actualidad. Permítasenos agregar que, aunque la práctica de la ingeniería aeronáutica descansa en bases teóricas firmes, las matemáticas profundas involucradas están lejos de ser bien entendidas y la investigación es muy activa

[58] Debe decirse empero que éste último tema estaba relativamente mal representado, y Hilbert dedicó mucho esfuerzo al asunto en los años siguientes. BROWDER, F. (ed.) *"Mathematical Developments arising from Hilbert Problems". Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, XXVIII.* Amer. Math. Soc. Providence, 1976.

[59] Su libro titulado *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, *"Fundamentos del Cálculo de Probabilidades"*, es publicado en 1933.

en EE.UU. Hemos de recordar aquí que Boltzmann fue un estudioso del movimiento browniano, que L. BACHELIER escribió su tesis en Paris en 1900 en un intento (infructuoso de momento) de modelar los mercados financieros, y que Einstein recibió el premio Nobel en 1921 no por la teoría que le hizo famoso sino por sus estudios del efecto fotoeléctrico y... del movimiento browniano. Las cadenas de Markov habían sido estudiadas desde 1900 por A. A. MARKOV.

Hoy día, la teoría de los procesos estocásticos, en particular los procesos de Markov, es una de las áreas predilectas de esta floreciente rama de las matemáticas, y el Cálculo de ITŌ es una herramienta esencial del análisis estocástico continuo que compite con el cálculo infinitesimal clásico de Newton y Leibniz. Todo este desarrollo era completamente desconocido, incluso insospechado, hace poco más de un siglo y se ocupa de *informarnos sobre los fenómenos aleatorios y su evolución probable*, es decir, nos permiten *hacer predicciones sobre lo no exacto*. Como es ya usual en nuestro relato, se trata de un empeño no sólo académico, sino que tiene aplicaciones muy importantes en los procesos científicos, industriales y financieros.

• **El caos determinista**. El estudio del caos generado por las ecuaciones diferenciales, ya anunciado por Poincaré, cuyas matemáticas habían madurado gracias al impulso de diversos matemáticos, especialmente G. BIRKHOF, ha de esperar a la obra de un físico dedicado a los estudios del clima para adquirir el impulso definitivo. En efecto, se atribuye a Edward LORENTZ, del MIT, ese mérito [60]. Preocupado por el estudio de los procesos convectivos en la atmósfera propone un simple modelo no lineal consistente en 3 ecuaciones diferenciales ordinarias que no me resisto a copiar

$$\begin{cases} x' = -10x + 10y, \\ y' = 28x - y + xz, \\ z' = \frac{8}{3}z + xy. \end{cases}$$

Para esta elección de los parámetros (es decir, los coeficientes de la ecuación, que pueden ir variando en el problema) encuentra sorprendido que las trayectorias numéricas que produce su ordenador no convergen a ninguna situación periódica. El artículo de 12 páginas data de 1963. Surgen conceptos que llegarán al gran público, como *caos determinista* y *atractores extraños*, y toda una rama de las matemáticas tanto teóricas como experimentales, una gran novedad posible gracias al desarrollo de los

[60]Su famosa publicación *"Deterministic non-periodic flow"*. ATMOS, J. *Sci* **20**. 1963. Págs. 130–141.

ordenadores. Autores como S. SMALE y M. FEIGENBAUM se hacen célebres[61]. Entran en escena los *conjuntos fractales* de B. MANDELBROT[62], ya anunciados en la obra de G. JULIA en los años 20[63]. Hurgando en la historia se descubre como precursor la figura gigante de H. Poincaré que había previsto este caos en su cabeza.

El estudio de los procesos caóticos, fractales y turbulentos es una de las fronteras del pensamiento matemático actual.

• **Nuevos conceptos de solución en las ecuaciones diferenciales.** Hacia los años 30 era claro para muchos investigadores que el concepto clásico de solución era insuficiente para construir una teoría de las ecuaciones diferenciales que satisfaga las necesidades de las ciencias a las que se aplican. En efecto, es natural en esta disciplina plantear *problemas*, es decir, conjuntos de ecuaciones y datos adicionales, que sean *bien propuestos*; siguiendo a J. HADAMARD, ello quiere decir que tales problemas han de tener una solución, que ésta ha de ser única si se dan datos suficientes, y que además tal solución ha de depender continuamente de los datos. No se trata ya de que la solución sea clásica, pues ésta puede no existir o puede que no sea el concepto de solución cuya existencia resulta natural demostrar.

Enfrentados con este reto, los matemáticos han desarrollado diversas nociones de *soluciones generalizadas* con significado físico. Quizá el ejemplo más notable haya sido el problema de minimización de energía de Dirichlet ya mencionado[64], motivación de los espacios de Hilbert. Otro ejemplo básico es el problema de Riemann de la dinámica de gases, ya mencionado. Un tercer problema similar lo afronta J. LERAY[65] en 1933 en el estudio de las soluciones de las ecuaciones de Navier-Stokes de los fluidos reales (viscosos) en el espacio tridimensional. Gracias al trabajo de los analistas funcionales (S. L. SÓBOLEV, L. SCHWARTZ,...)

[61] cf. STEWART, Ian. *Does God play dice? The New Mathematics of Chaos*. Penguin. Londres, 1989.

[62] cf. MANDELBROT, B. *The fractal geometry of Nature.* 2nd ed. San Francisco, 1982.

[63] Su publicación data de 1918.

[64] Se trata de minimizar la integral de energía $\int_\Omega |\nabla u|^2 dx$ entre todas las funciones admisibles $u = u(x)$ definidas en un recinto del espacio Ω y que toman valores asignados en el borde de Ω; ∇u designa el gradiente de u. El problema de principio, crucial para la correcta solución, es qué se entiende por función *admisible*.

[65] Jean Leray publicó tres artículos sobre el asunto en 1933-34. El último es el *"Essai sur les mouvements planes d'un liquide visqueux emplisssant l'espace". Acta Math.*, **63**. 1934.

se introducen los conceptos de *solución débil* y *solución en el sentido de las distribuciones*. Resumiendo mucho, no se pide a las soluciones que posean todas las derivadas implícitas en la ecuación sino que cumplan con ciertos tests. Con los expertos en leyes de conservación (P. Lax, O. A. Oleinik, S. N. Kruzhkov) se llega a las *soluciones de entropía*, que no son siquiera continuas (y se recupera así el legado de Riemann, Rankine y Hugoniot y sus ondas de choque).

En nuestros días aparecen nuevos conceptos de solución para satisfacer las crecientes necesidades, como las *soluciones viscosas* de M. G. Crandall, L. C. Evans y P. L. Lions. L. Caffarelli extiende este concepto a los problemas de cambio de fase o frontera libre, donde la discontinuidad es parte fundamental del planteamiento matemático. Y la saga continua con las soluciones *mild*, soluciones de semigrupos, soluciones renormalizadas,...

Uno de los aspectos más llamativos de estos nuevos conceptos es su compatibilidad con las *soluciones numéricas* propias de los métodos discretos del cálculo numérico. Se halla así una sorprendente alianza de los conceptos abstractos y los numéricos contra "la rigidez de los clásicos". Por otra parte, el Análisis Funcional pasa a formar parte del currículo básico del matemático aplicado y el ingeniero.

Las matemáticas y la vida social: la teoría de juegos

La teoría de juegos analiza los "juegos", es decir, situaciones en que se da un conflicto de intereses. Parte de los juegos más simples, pasatiempos que pueden ser analizados completamente; de ellos se pasa a los "juegos reales" como el póker o el ajedrez, y de ahí a los complejos problemas de estrategias en áreas de enorme interés social como la economía o la política. Vemos en ello un gran paralelismo con el proceder del cálculo de probabilidades y la estadística, que pasan de los juegos de azar con cartas o bolas a la estadística industrial y social por un lado, y al comportamiento de los gases o los átomos por otro.

El primer teorema en teoría de juegos es atribuido a E. Zermelo, fundador de la versión de la teoría de conjuntos ZF hoy tomada por estándar, y se titula "Sobre una utilización de la teoría de conjuntos en la teoría del ajedrez", 1913[66]. Yendo hacia atrás en el tiempo, el pri-

[66] *"Ueber eine Anwendung der Mengenlehre auf die Theorie des Schachspiels"*. 1913. Págs. 501-504 en los *Proceedings of the Fifth International Congress of Mathematicians,* Vol. II (E. W. Hobson and A. E. H. Love, eds.), Cambridge University Press).

mer libro de las matemáticas de la competición parece ser de Augustin Cournot en 1838[67]. Otro conocido matemático, E. Borel, escribió sobre juegos de estrategia en el período 1921-27 y dio una prueba restringida del teorema del minimax, uno de los resultados más importantes de la matemática aplicada del siglo XX al decir de Casti [68].

Pero son dos grandes figuras quienes asientan las matemáticas de la competición en el siglo XX. Uno es J. von Neumann, que demuestra en 1928 el teorema del minimax y analiza en su famoso libro con Morgenstern, 1944, los juegos cooperativos y de suma cero[69]. El otro es J.F. Nash[70] que en cuatro artículos fundamentales de 1950-53 establece la teoría de los juegos no cooperativos[71]. Los conceptos de equilibrio dominante y equilibrio de Nash son hoy día herramientas matemáticas básicas de la práctica económica y política (en sus diversas vertientes de elección social) y deberían ser mejor conocidos por el gran público. J. Nash recibió el Premio Nobel de Economía en 1994 y es uno de los pocos Premios Nobel Matemáticos, junto con los economistas J. Tinbergen[72], L. Kantorovich y Selten[73].

La Economía Matemática desborda evidentemente el tema de los juegos, la competición y las estrategias, que forman el reino de las matemáticas de la llamada Microeconomía. Después hablaremos brevemente de las matemáticas del mercado financiero.

En la Teoría de la Elección Social es importante el Teorema de Im-

[67]El libro se titula *Recherches sur les Principes Mathématiques de la Théorie des Richesses*, título de lo más prometedor. Hemos de mencionar La Teoría de la Evolución de Darwin, que toca en un sentido el tema con su selección natural, que produce situaciones de equilibrio.

[68]Sus cinco favoritos son la teoría de juegos, el teorema del punto fijo, el problema de parada de Turing, el método simplex y ... se ruega al lector que consulte el libro. CASTI, J. L. *Five Golden Rules*. John Wiley. New York, 1996. *Five More Golden Rules*. John Wiley. New York, 2000.

[69] *Theory of games and economic behaviour*. J. von Neumann and O. Morgenstern.

[70]Famoso también por sus trabajos en geometría y en ecuaciones en derivadas parciales y por su azarosa biografía reflejada en un filme reciente.

[71]Entre ellos NASH, J. F. *"Non-Cooperative Games"*, *Annals of Mathematics.* 1951; *"Two-Person Cooperative Games"*, *Econometrica.* 1953

[72]Tinbergen es importante en nuestro relato, pues fue uno de los primeros propulsores de la modelización matemática más allá de los confines de la física; T. vio que las aplicaciones de las matemáticas podían afectar a muy diversas áreas.

[73]Otros científicos galardonados que han aparecido en nuestro relato son Lorentz, Raleigh, Planck, Einstein, Bohr, de Broglie, Heisenberg, Schrödinger, Dirac, Born y Feynman en Física y Lord Russell en Literatura.

posibilidad de Arrow[74], que pone un límite a las capacidades de los sistemas axiomáticos de elección, aplicando a la ciencia social las ideas de los célebres resultados de indecibilidad e incompletitud de Kurt Gödel (1931) para la aritmética formal, uno de los resultados más notables de la Matemática del siglo XX[75]. El resultado de Gödel trata de la indecidibilidad intrínseca a todos los sistemas formales que incluyan la aritmética, tema de Lógica y Fundamentos de la Matemática de apariencia eminentemente pura y por ello de nula interacción con el mundo práctico si hemos de creer a los fervientes defensores del aislamiento esencial de las matemáticas puras. Pues bien, volveremos a hablar de él en el próximo tema, que trata de ordenadores, de la mano de otro de nuestros héroes, A. Turing.

7. INGENIERÍA Y MATEMÁTICAS EN LA ÚLTIMA REVOLUCIÓN DEL SIGLO. LOS ORDENADORES Y LA MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

La realización práctica del viejo sueño de construir una máquina de calcular toma cuerpo en forma del moderno ordenador que acredita dos orígenes, la Tecnología y las Matemáticas, los cuales confluyen en un fantástico invento en el año 1946[76]. Por una parte tenemos el viejo proyecto de la máquina de calcular, pensada ya en el siglo XVII por B. Pascal[77] y G. Leibniz[78], y que debe tanto a Ch. Babbage a principios del siglo XIX[79], proyecto que es realizable en el siglo XX de forma eficiente gracias al avance de la electrónica: primero el tubo de vacío y luego una espectacular saga de progresos técnicos que nos llevan al semiconductor, a la miniaturización y al *chip*[80].

Pero el ordenador o computadora no nace como máquina de calcular

[74]Kenneth J. Arrow, trabajo doctoral en 1948-49 publicado en *Social Choice and Individual Values* en 1951. En 1972, Arrow recibió el Premio Nobel de Economía por sus contribuciones al estudio del equilibrio económico y la elección social.

[75]La incompletitud de los sistemas formales fue publicada en *"Ueber formal unentscheidbare Saetze der Principia Mathematica und verwandter Systeme". "On formally undecidable propositions of Principia Mathematica and other related systems".*

[76]Con esta fecha hago referencia al ordenador ENIAC.

[77]Su *machine à calculer*, la *Pascalina*, se hizo famosa.

[78]Leibniz pensó en la dirección del álgebra, la lógica simbólica y el lenguaje universal. Recientes investigaciones históricas indican que una cierta primacía de tales máquinas calculadoras se debe a otro alemán, Schickard (1623) pero su máquina no llegó a funcionar.

[79]Babbage trabajó toda su vida en un proyecto mecánico, la *Analytical Machine*, el precursor del moderno ordenador electrónico, con la notable ayuda de Ada Byron, Lady Lovelace, hija del poeta y matemática.

[80]El circuito integrado fue inventado por R. Noyce y J. Kilby en 1958.

pasiva, sino que nace con un programa. Esta es la herencia de la lógica matemática, desde G. Boole con su álgebra al programa de formalización de las matemáticas de D. Hilbert, que lleva a la prueba de indecibilidad e incompletitud de Kurt Gödel en 1931 que destruye el sueño de Hilbert de una matemática de demostraciones automáticas. Ello provoca el interés de otro matemático genial, ALAN TURING (1912-1954), que traduce el programa de formalización al lenguaje de las máquinas, 1937[81], e inventa con Alonzo CHURCH la teoría de la computabilidad, años antes de que el ordenador viera la luz.

A. TURING

Sigue un momento histórico: el esfuerzo de guerra, el desciframiento del código alemán Enigma, ... Entra en escena von Neumann con la idea del programa en memoria, y se construye el ENIAC en 1946[82].

La computadora moderna surge como una máquina calculadora eficaz con cuatro características: es de utilidad general, electrónica, digital y programable; *las dos últimas propiedades se relacionan directamente con las matemáticas*. La primera computadora comercial, UNIVAC, funcionó en 1951. En estos 50 años se pasa de las grandes máquinas (armatostes) que manejan kilobytes o megabytes a los ordenadores personales con capacidad de decenas de Gigas y a la WWW. La dualidad en el mundo del ordenador continúa en forma de la famosa pareja *Hardware* y *Software*[83].

[81] *"On Computable Numbers, with an application to the Entscheidungsproblem". Proceedings of the London Mathematical Society.* 1937.

[82] Las siglas ENIAC significan *Electronic Numerical Integrator and Computer*, construido por J.W. Mauchly y J.P. Eckert en la Univ. de Pennsylvania; hoy es reconocido el trabajo pionero de J.V. Atanasoff. Mención merecen también el Colossus inglés, 1942, y las máquinas alemanas Z1 a Z4. METROPOLIS, N., HOWLETT, J., ROTA, G. C. (Eds.) *A History of Computing in the Twentieth Century.* Academic Press. New York, 1980. Todas estas máquinas tenían un propósito militar.

[83] Los ordenadores personales aparecen en 1977 y, en contra de las predicciones de los gurús, han ocupado la escena, gracias sin duda al progreso impresionante del hardware: un chip puede contener al final del siglo XX unos 10^9 transistores.

El mundo computacional, un nuevo mundo para las matemáticas

El mundo del ordenador está cambiando poco a poco la vida diaria del ciudadano: las transacciones bancarias, el correo electrónico, la reserva de pasajes, ... Su efecto sobre las matemáticas, menos conocido por el gran público, es aún más dramático. Aparecen por un lado, las nuevas ramas de la Matemática Computacional teórica, como la teoría de la computabilidad y la complejidad y la teoría de autómatas y lenguajes formales. Pero todas las ramas de la matemática pura y aplicada se contagian de la repentina capacidad para calcular efectivamente lo que antes era sólo imaginable, y este nuevo gusto se propaga como una infección (potente pero benigna) en la práctica cotidiana de las matemáticas: matemáticos, científicos e ingenieros calculan órbitas de satélites o trayectorias de sistemas dinámicos, distribuciones numéricas o series temporales de procesos reales, mapas climatológicos o estudios de singularidades, distribución de temperaturas en un alto horno o propiedades estadísticas de los ceros de la función Zeta de Riemann,... Y la finanza y la administración también calculan.

Entre los notables cambios acaecidos, las matemáticas tienen un papel importante en los procesos industriales u otros en que se combina la experimentación en laboratorio con las nuevas herramientas matemáticas: aparece la combinación de **modelización matemática - análisis matemático - simulación numérica y visualización - control,** que forma una herramienta de uso habitual en los más diversos campos: las comunicaciones, la predicción del tiempo, la astrofísica, la ingeniería minera, industrial, la industria del automóvil y del petróleo, los problemas medioambientales y la ecología, la economía y las finanzas, las comunicaciones, y en este momento, la biología y la medicina, como veremos con algún detalle en la sección 8. Esta área de las matemáticas tiene como tarea *aproximar de una manera eficaz* las soluciones de modelos matemáticamente muy sofisticados y complejos. El interés por su desarrollo y aplicación da lugar a los grandes Institutos y Centros de Cálculo.

Los nuevos conceptos: modelo numérico, simulación numérica, experimento o exploración numérica, visualización dinámica,... se hacen de uso diario en el medio científico e industrial. El desarrollo de métodos de formulación numérica de los modelos continuos, como las ecuaciones diferenciales, es una rama fundamental de la matemática computacional (a saber, los métodos de diferencias finitas, y elementos finitos[84], los volúmenes finitos,...). El estudio de las propiedades y la convergencia de estos métodos constituye el Análisis Numérico, que tiene una conexión profunda con el Álgebra. Por otra parte, la capacidad de cálculo da nueva vida a la matemática discreta, como la teoría de grafos, con sus importantes aplicaciones (por ejemplo, a las redes telefónicas y en general al mundo de las comunicaciones).

Un nuevo paradigma de la ciencia
El broche final de esta evolución vertiginosa es el surgimiento de un nuevo paradigma científico en que la **Ciencia computacional** es el tercer componente básico del método científico, junto con la Teoría y el Experimento. Nos hallamos pues ante una alteración profunda de la herencia científica de Galileo y Newton, que la enriquece en la dirección de las matemáticas.

Esta nueva visión, que comenzó en la ingeniería y las ciencias físicas, se practica hoy día intensamente en todas las ciencias, dando lugar a **nuevas disciplinas** o **subdisciplinas**, como la Física Computacional y la Dinámica de Fluidos Computacional, la Biología Computacional o la Química Computacional. Programas de las licenciaturas (incluso nuevas titulaciones), programas de investigación internacionales, centros de investigación, congresos y revistas prestigiosas confirman la relevancia del *tercer rostro* de la ciencia en los albores del siglo XXI. La ventaja del camino computacional queda perfectamente reflejada en la siguiente declaración de los Reviews in Computational Chemistry: *"As a technique, Computational Chemistry has the advantage of producing answers cheaply and quickly (compared to e.g. thermodynamic measurements)"*. Es decir, que cuesta menos calcular que medir (y es fiable). Y añade otro aspecto importante, la capacidad para examinar lo hipotético: *"and [it works] for hypothetical structures, like transition states"*.

Lo anterior no se circunscribe a las ciencias clásicas, afecta incluso en mayor grado a la ingeniería y la ciencia económica. La novedad del cambio, que sucede ante nuestros ojos, es un reto de enorme importan-

[84] Los elementos finitos son un ejemplo maravilloso del desarrollo de una herramienta matemático-numérica por el esfuerzo paralelo, pero separado, de matemáticos e ingenieros, ver el interesante relato histórico de BABUSKA, I. *"Courant Element: Before and After"*. En *Finite Element Methods*. Edited by Krizek, Neittaanmki and Sternberg, M. Dekker Inc. New York, 1994. El fenómeno no es aislado, piénsese en la reciente historia de las ondículas o "wavelets". Estos ejemplos deberían llevarnos a pensar más en los beneficios de la comunicación.

cia para el futuro de las matemáticas y resulta difícil de asimilar para muchos colegas. No hay nada malo en seguir anclado en un pasado glorioso,... pero se paga un precio. De la amplitud del panorama hablamos en la próxima sección.

8. LOS RETOS Y TENDENCIAS DEL SIGLO XXI. MATEMÁTICAS EN LAS CIENCIAS, LA INDUSTRIA, LAS FINANZAS Y LA ADMINISTRACIÓN

En consonancia con los apuntes vistos de la reciente evolución de la matemática pura y aplicada, que combina la exigencia de una sólida teoría con una ambición universal, el panorama que ofrece el mundo de las matemáticas de cara al futuro es de una asombrosa variedad. Usando un idioma algo retórico, los expertos dicen que las matemáticas son *ubicuas*, están por todas partes, y *relevantes*, importan. La modelización matemática juega un papel mayor que nunca en la ciencia, la ingeniería, los negocios y las ciencias sociales.

Mencionaremos solamente algunos de los principales temas de aplicación que aparecen en la literatura, en los congresos, en los programas de los institutos de investigación. También hemos utilizado una serie de fuentes[85]. En itálicas señalamos aspectos matemáticos relacionados para comodidad del lector.

• Mecánica celeste. Problemas de la ciencia aeroespacial. *Estabilidad y caos en sistemas dinámicos. Atractores extraños.* Mecánica de sólidos y fluidos en gravedad cero.

• Teoría de fluidos. Aplicación a la Meteorología y la Climatología. Ingeniería del océano. Problemas medioambientales complejos, recalentamiento global y otros temas geosociales. *Modelos de circulación glo-*

[85]FONSECA, I. et al. *"The Impact of Mathematical Research on Industry and vice versa"*. Round Table at 3rd European Congress of Mathematics. Barcelona, july 2000.
FRIEDMAN, A. et al. *"Mathematics in Industrial Problems"*. (A 10 volume collection) *IMA Volumes in Mathematics and its Applications.* Springer-Verlag. Berlín, 1988-1998.
FRIEDMAN, A., LAVERY, J. *How to Start an Industrial Mathematics Program in the University.* SIAM Report. Philadelphia, 1993.
MUMFORD, D., FRIEDMAN, L., LOVÁSZ, L., MANIN, YU., ROTA, G. C., JENSEN, R. B. y PENROSE, R. Informe sobre el futuro de las Matemáticas contenido en *Mitteilungen der Deutchen Math. Vereinigung* (es decir, *Notices of the German Math. Union*), 2. 1998.
ODEN, J. T. et al. *"Research directions in computational mechanics". Report of the U.S. National Commitee on Theoretical and Applied Mechanics.* Washington, 2000.

bal, modelos de equilibrio; modelización estocástica del clima; jerarquías de modelos de complejidad intermedia, como los modelos geostróficos. Glaciología. Acústica y aplicación a la industria del sonido. Fluidos industriales, lubricación. Turbulencia. *Predecibilidad y caos. Estabilidad, bifurcación. Problemas de frontera libre.* Áreas de intersección, como la interacción fluido-estructura.

• Aeronáutica. Problemas de la hidrodinámica. Vuelo supersónico y transónico. Problemas de la combustión (propagación de llamas, detonación). *Ondas de choque y ecuaciones hiperbólicas. Capas límite y desarrollos asintóticos. Ondas viajeras.*

• Física fundamental. Las matemáticas del mundo atómico y de las partículas elementales. El modelo estándar, la electrodinámica cuántica, la cromo-dinámica cuántica. *Teoría de grupos, renormalización, teorías gauge, supersimetría, ecuaciones de Yang-Mills, instantones, dilatones, "branes",.... Geometrías y topologías exóticas en dimensiones superiores.*

• Astrofísica. Relatividad general, modelos estelares. Matemáticas de la física de plasmas, magnetohidrodinámica. *Ecuaciones cinéticas (Boltzmann, Fokker-Planck, Vlasov, ...)* .

• Ciencias de la tierra. Problemas de recursos y minería. Problemas de conservación del medio ambiente. Transporte de contaminantes en el aire y el suelo. Hidrología computacional. *Las ecuaciones de la extracción de petróleo, de la filtración en los suelos, de la difusión de contaminantes: sistemas no lineales de EDPs y problemas de frontera libre.* Matemáticas de los fenómenos sísmicos, *propagación de ondas, problemas inversos.*

• Ciencia de materiales. Modelado y simulación de materiales "composites", materiales magnéticos, polímeros, cristal y papel. Propagación de fracturas y otros mecanismos de fallos. *Elasticidad lineal y no lineal. Teoría de la homogeneización.* Transiciones de fase, crecimiento de cristales, superconductividad e histéresis.

• Nanotecnología. Ópticas integradas, redes ópticas. Electrónica y óptica cuántica. Técnicas de Nanoescalas en medicina, materiales porosos. *Acoplamiento de modelos con estados cuánticos, mesoscópicos y continuos. Teoría de Boltzmann semiclásica, ecuación de Wigner.*

• Ingeniería industrial. Procesos de la siderurgia, altos hornos. Prototipos de la industria automovilística (fluidos, aerodinámica, materiales y teoría de la fractura).

• Comunicaciones. Telecomunicación y redes ópticas: análisis, simulación, optimización, optimización de la tasa de transmisión, diseño de redes. Antenas, rádar y sónar. *Teoría de campos electromagnéticos.* Los hornos de microondas acoplan las ecuaciones de Maxwell con la teoría del calor de Fourier.

• Matemática Discreta. *Teoría de grafos, combinatoria.* Aplicaciones a la administración de empresas, programación de tareas, rutas,...

• Informática. *Lógica matemática, algoritmia, complejidad computacional. Paralelización.* Autómatas finitos, lenguajes formales, *álgebra.* Aprendizaje de máquina, minería de datos, inteligencia artificial, proceso del idioma natural.

El diseño de la computadora cuántica abriría un nuevo mundo a la computación.

• Control. Control óptimo, control robusto, control no lineal. Control predictivo. Sistemas de control "fuzzy". Redes neuronales. Detección y diagnóstico de fallos en los procesos industriales. Modelado y control de sistemas económicos. Programación con condiciones. Comunicación y control de sistemas híbridos distribuidos.

• Automatización y Robótica. *Geometría Algebraica y computación.* Visión por computadora y realidad virtual. Aprendizaje biológico y computacional.

• Teoría de la información. Codificación de mensajes, códigos correctores de errores. Las sorprendentes aplicaciones de *la teoría de números y el álgebra.* Proceso y compresión de imágenes. *Ondículas, fractales, teorías de EDPs no lineales.* Reconocimiento del habla y las imágenes.

• La estadística en la ciencia, la industria, la empresa y el gobierno. Estimación y tests de hipótesis, diseño de experimentos. Procesos estocásticos. Series temporales. Epidemiología. Control de calidad. Análisis de varianza. Análisis multivariante. Muestreo, votaciones.

• Teoría de Optimización y Programación Matemática. Programación entera, programación no lineal, programación convexa. Métodos iterativos. Optimización del diseño industrial. *Métodos numéricos, ecuaciones en derivadas parciales, cálculo de variaciones, combinatoria, álgebra lineal.*

• Problemas de transporte óptimo. Los problemas del tráfico (modelos continuos y discretos). Planificación de redes. El tráfico en la *Web*.

• Economía. La matemática financiera (valoración de opciones, comercio de derivados, riesgo,...) une *las ecuaciones diferenciales estocásticas con las ecuaciones en derivadas parciales y problemas de frontera libre*. Modelos para la economía global.

• Química. Química cuántica: *simulación de estructuras atómicas y moleculares a través de las ecuaciones fundamentales. Modelos de Schrödinger, Hartee-Fock, Thomas-Fermi, Born-Oppenheimer,...* Dinámica de reacciones, combustión. *Matemáticas de la nucleación, crecimiento de cristales y quemotaxis. La propagación de frentes, ondas viajeras, os-*

ciladores químicos. Caos. Diseño de drogas.

Las Ciencias Naturales y la Medicina:

• Biología: Ecología matemática, epidemiología, biométrica, la bioinformática. Matemática de la Genética, Filogenética computacional. La estructura y función del ácido nucleico. Evolución molecular. Proteómica. *Cálculo con ADN.* Alineación de secuencias, razonamiento borroso. Modelización matemática en biopolimerización.

• Medicina: interacción fluido-estructura como modelo para el flujo sanguíneo. Modelado y simulación de la función de otros órganos: cerebro, pulmones e hígado. *Auto-organización y geometrías fractales.* Asistencia computacional en cirugía. Farmacocinética, modelado del crecimiento de tumores. Neurociencia computacional. Matemática de las enfermedades infecciosas y difusión de epidemias. Órganos artificiales, modelado del sistema inmunológico.

• Tratamiento de imágenes en Medicina. Tomografía: tomografía computerizada, reconstrucción 3D de imágenes. *Transformadas de Fourier y Radon, problemas inversos.*

• Aunque la Matemática computacional (tomada aparte de la Informática) penetra todos los campos de aplicación, merece una mención por sí misma en este listado: métodos numéricos y códigos; algoritmos eficientes; aproximación, estimaciones (a priori y a posteriori) del error, métodos y modelos adaptativos, mallado, descomposición del dominio, análisis multiescala, cálculo numérico de procesos aleatorios,...

• Por otro lado, la Modelización Matemática en sus diferentes variantes (determinista, continua, discreta,...) plantea los problemas de validación de modelos y las técnicas para obtener y elaborar los datos en que se basa la validación (ver apartado de Estadística), así como el importante (y debatido) concepto de jerarquía de modelos, una manera progresiva de acercarse a la “ realidad ”que es hoy día parte integrante de la “caja de herramientas”del científico aplicado (los viejos idealistas con su la “verdad eterna”se revolverán en sus tumbas; ¿o quizá no?).

Detendremos aquí el listado y haremos una muy necesaria pausa con algunos comentarios. Se observará que la lista está sólo ligeramente articulada por afinidad de temas; sin embargo, la interconexión íntima de las ramas de la matemática aplicada nos obliga a cometer repeticiones, o a poner un tema bajo uno de varios posibles títulos. Por otra parte, hemos dejado fuera diversos campos de aplicación: las teorías de los sistemas complejos, la autosemejanza en el mundo natural, la formación y reconocimiento de modelos (*patterns*) y el sistema de posicionamiento global (GPS), la matemática de los sistemas electorales; la arquitectura, la industria textil y la alimentaria también han llamado a la puerta de la matemática. Y hay una muy fuerte tendencia para que la Matemática juegue un papel importante en las artes visuales, como ya hace en la Industria del Ocio combinada con el progreso formidable de la tecnología de las computadoras. Y ¿cómo pude haberme olvidado de hablarles de la Teoría de Nudos, del Método Simplex de G. Dantzig, líder incontestado del uso de las matemáticas en las empresas, o del Filtro de Kalman? En conclusión, esta larga lista es incompleta, principalmente debido al conocimiento limitado del autor; pero espero que convencerá al lector de la variedad enorme de intereses de la matemática aplicada actual.

Me gustaría agregar una reflexión personal final sobre las tendencias profundas que veo bajo la diversidad anterior. Las matemáticas del porvenir serán mucho más **estocásticas** y **algorítmicas** de lo que fueron hasta el siglo XX, y la **modelización matemática** será considerada una parte esencial de la educación y la actividad matemática, junto con el cálculo y la simulación. Pero pase lo que pase, me parece que una **prueba** clara y completa, y tan elegante como sea posible, será siempre el meollo de nuestra ciencia, como ha sido desde tiempos del buen Euclides, y los matemáticos futuros todavía se entusiasmarán con **problemas y conjeturas,** y algunos de ellos al modo de Galileo **mirando al mundo** (o las estrellas). Y construirán, posados sobre hombros de gigantes del pasados, esos delicados, intrincados y huidizos objetos llamados **teorías,** algunas de ellas destinadas al olvido, unas pocas a la eternidad,..., o al uso diario. ¿Quién se maravilla ya de la sorprendente existencia de las ondas electromagnéticas llenando el aire, ahora que incluso se han vuelto una forma de contaminación? Pero basta de filosofía por el momento.

9. DE LOS 23 PROBLEMAS DE HILBERT EN 1900 A LOS PROBLEMAS DE CLAY EN 2000

Ya hemos señalado el profundo impacto que la lista de problemas propuesta por D. Hilbert en 1900 tuvo sobre sus contemporáneos y sucesores. Han pasado 100 años desde entonces y diversas iniciativas pretenden dar la réplica al gran hombre, cf. por ejemplo los libros de Arnold - Atiyah - Lax - Mazur, y de Engquist - Schmid[86] El miércoles 24 de mayo de 2000 se anunció en el Collège de France de París, el Conjunto de los 7 problemas matemáticos que constituyen los *Millennium Prize*

[86] Para más información ver el artículo de Jackson citado en las referencias finales. Ver también el vol. 3, n.º 1. 2000. de la Gaceta de la RSME, artículo de J. L. Fernández y M. de León.

Problems, patrocinados por el *Mathematics Clay Institute*. Recordando a Hilbert pretendía reflejar 7 de los más importantes problemas abiertos de la ciencia matemática al comienzo del nuevo siglo [87]. Estos problemas recorren las diversas áreas las matemáticas puras y aplicadas y son

1. P versus NP (Teoría de la computación)
2. Conjetura de Hodge (Geometría algebraica)
3. Conjetura de Poincaré (Geometría y topología)
4. Hipótesis de Riemann (Teoría de números)
5. Existencia de Yang-Mills y Hueco de Masa (Física teórica)
6. Existencia y regularidad para las ecuaciones de Navier-Stokes (Mecánica de Fluidos y PDEs)
7. Conjetura de Birch y Swinnerton-Dyer (Geometría aritmética algebraica)

A riesgo de ser impertinente (pido disculpas al lector) desearía dar una impresión personal sobre esta lista que parece destinada a ser famosa e influyente. Afortunadamente, incluye problemas abiertos importantes en temas variados de la matemática pura y aplicada. Sin embargo, no hace suficiente justicia a la visión aquí expuesta de la matemática como lenguaje y herramienta básica de la ciencia y la ingeniería.

10. EJEMPLOS DE NUEVOS CURSOS

Tras dos secciones consagradas a la enumeración, es tiempo de volver al trabajo. A continuación, echaremos una ojeada más detallada a algunas de las novedades de la matemática actual. Entre las muchas opciones, tomaremos tres ejemplos: de las finanzas, las comunicaciones y la física fundamental.

• Matemáticas de la incertidumbre financiera y el riesgo

Un ejemplo notable de las aplicaciones prácticas de las matemáticas, desarrollado en los últimos decenios, es la llamada matemática financiera. Los nuevos instrumentos financieros de *futuros* y *derivados* se basan y a su vez motivan esta nueva rama de la matemática aplicada, la cual combina procesos estocásticos, ecuaciones en derivadas parciales y problemas de frontera libre. El resultado más famoso es el *modelo de Black-Scholes*[88] para el mercado de opciones, el cual reduce la valoración a la

[87] la resolución de cada problema valdría al autor un premio de 1 millón de dólares. Toda la información sobre el premio y los problemas se puede obtener en la dirección `http://www.claymath.org/prize_problems`.

[88] BLACK, F., SCHOLES, M. *The pricing of options and corporate liabilities*. 1973.

solución de una ecuación del calor (inversa en el tiempo). Me gustaría registrar esta reducción en la siguiente sucesión de fórmulas

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma \, dB_t \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} + b\, S\, \frac{\partial P}{\partial S} - r\, P = 0,$$

que pasa de una ecuación diferencial estocástica, representando la incertidumbre del azar, a una EDP determinista que permite la valoración del precio. Éste es un ejemplo sorprendente de *transferencia de conceptos y técnicas* hecho posible por la clave común matemática (y por el hecho de que F. Black era licenciado en Física Cuántica).

La inestabilidad inherente a esos mercados y las enormes repercusiones sobre la economía pública y privada hacen tanto más importante la aplicación del método matemático para intentar hallar la clave matemática que rige tales procesos y a reemplazar las reglas empíricas y la adivinación en la práctica financiera por matemáticas. Un reto para el nuevo siglo.

• Del análisis de Fourier a las ondículas

Hemos discutido hace un rato la situación creada en el análisis de Fourier cuando Du Bois Raymond halló un ejemplo de serie de Fourier no convergente, y queremos recordar aquí que la tercera opción para salir del atolladero consistía en cambiar la base de las funciones usadas en la representación. Esto es lo que hizo A. Haar en 1909[89], resolviendo así la dificultad en principio. Podemos decir que éste es el origen remoto de las ondículas (wavelets), una idea que tardó un siglo entero en madurar. La investigación en este problema antes de la Segunda Guerra Mundial parece haber seguido un interés exclusivamente matemático sin ninguna aplicación en mente. Pero después de la guerra, ingenieros y científicos aplicados aterrizaron en la idea llevados por las aplicaciones, notablemente, a la teoría de la información de Claude Shannon. En el futuro, las dos líneas de pensamiento se unieron y el análisis de ondículas se ha convertido en una importante y fértil intersección de las fronteras de las matemáticas, el cálculo científico y el tratamiento de señales[90].

Merton y Scholes recibieron el Premio Nobel de Economía en 1997. ¡Una primera versión del modelo había sido propuesta por L. Bachelier en 1900! se tardaron siete décadas para llegar a un modelo realista y a que la aplicación ocurriese.

[89] *"Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme". Math. Annalen* **69**, 1910. Págs. 331-371.

[90] La mayor parte de esta información está tomada del libro JAFFARD, S., MEYER, Y., RYAN, R. D. *Wavelets, tools for Science and Technology.* SIAM. Philadelphia, 2001., y también HERNÁNDEZ, E., WEISS, G. *A first course on wavelets. With a*

• Modelos matemáticos de la Física Teórica y la naturaleza de la materia

Las dos grandes revoluciones científicas en la Física del siglo XX, es decir, la Relatividad y la Mecánica Cuántica, han impreso en esta ciencia una aún mayor conexión con la matemática pura. La Física se enfrenta con el desafío enorme de construir una teoría que una a ambos modelos en un todo coherente. Experimentales y teóricos han emprendido la búsqueda de la "teoría última"que explicaría todo, desde la constitución del átomo a los extremos más lejanos del Universo. Tal teoría está aún por llegar (y podría estarlo mucho tiempo) pero se han obtenido grandes logros (pues se hace camino al andar, como dijo el gran poeta). He aquí algunos hitos, todos ellos matemáticas profundas.

La Electrodinámica Cuántica (QED) fue desarrollada para describir la interacción electromagnética en el marco de la Mecánica Cuántica, y trata de las cargas y los fotones y usa los hermosos diagramas de Feynman. Una teoría matemáticamente coherente valió a sus autores, Julian SCHWINGER, Richard FEYNMAN y Sin-Itiro TOMONAGA, el premio Nobel de Física en 1965. Por su lado, la Cromodinámica[91] hace un trabajo similar para describir la fuerza llamada "fuerte"que actúa entre los *quarks*, partículas postuladas por M. GELLMANN y G. ZWEIG en 1964 como los entes constituyentes de neutrones y protones. De las cuatro fuerzas básicas de la Naturaleza (gravitacional, electromagnética, débil y fuerte), las dos intermedias reciben una teoría unificada en 1967 con el trabajo de S. WEINGER, SH. GLASHOW y Abdus SALAM. *Simetría*, *gauge* y *renormalización* son las palabras clave en este mundo de alta matematización. Las ecuaciones de Maxwell, Schrödinger y Dirac ceden el lugar a las ecuaciones de Yang-Mills. El trabajo cristaliza en los primeros años 70 en el Modelo Estándar de partículas elementales, que explica la realidad atómica en términos de tres generaciones de quarks y *leptones*. Estas partículas actúan mutuamente a través de la teoría del grupo $SU(2) \times U(1)$ para la fuerza electrodébil y la de $SU(3)_{color}$ para la fuerza fuerte. La Matemática está por consiguiente en el puro centro del modelo, en forma de grupos de Lie, geometría diferencial (más específicamente, conexiones en fibrados) y ecuaciones en derivadas parciales.

Siguiendo adelante, las Teorías de Gran Unificación intentan combi-

foreword by Yves Meyer. Studies in Advanced Mathematics. CRC Press. Boca Raton, FL, 1996.

[91] El nombre hace referencia a la pintoresca denominación para la carga conservada, llamada "el color".

nar ambas teorías de grupos en una. En la Teoría de Cuerdas, la vieja idea básica de las partículas puntuales es reemplazada por la idea de cuerdas vibrantes elementales. Al final del siglo XX, la Teoría de Supercuerdas propone un modelo matemático para la unificación de todas las fuerzas, de todas las físicas. Le falta, sin embargo, comprobación experimental suficiente; sin ésta, una teoría es simplemente una teoría. Y la búsqueda continúa. Este chorro de ideas ha motivado desarrollos matemáticos importantísimos, asociados a los nombres de matemáticos famosos como M. F. Atiyah, S. K. Donaldson y E. Witten.

Estos físicos creen, pues, que la combinación modelos-y-experimentos nos permitirá entender un mundo extraño en que la materia, el espacio, y tiempo no son lo que nosotros solemos pensar, donde el espacio vacío está lleno de actividad e incluso podrían existir bastantes dimensiones espaciales adicionales (es decir, por encima de las 3 que vemos más el tiempo) arrugadas en distancias ridículamente pequeñas (la distancia típica sería de 10^{-35}m, por eso no las vemos, *voilà l'astuce*; pero nos dicen que vemos la matemática, y a su debido tiempo veremos las consecuencias).

11. HECHOS Y OPINIONES

En palabras de John Milnor, *"pure mathematicians tend to judge any work in the mathematical sciences on the basis of its mathematical depth, the extent to which it introduced new mathematical ideas and methods, or it solves long standing problems"*. A lo que yo agregaría que las nuevas ideas y métodos deben ser juzgados por su productividad, y mencionaría como importantes cualidades, la elegancia de la prueba y la visión o intuición. Continúa así: *"However, when mathematics is applied to other branches of human knowledge, a quite different question must be asked first: to what extent does it increase our understanding of the real world"*[92].

Hubo en épocas no muy remotas un movimiento de separación en las matemáticas que parecía alejar cada vez más a los cultivadores de ambos géneros, puro y aplicado (en la medida en que se puede hablar de una separación que en los mejores casos nunca ha sido neta). Y no debemos olvidar el rechazo de muchos científicos puros contra un tipo de matemática aplicada más atenta a la ganancia que a la exigencia científica, y, al contrario, el rechazo de muchos científicos aplicados hacia

[92] Ver las *Notices* de la *Amer. Math. Soc.* 1998.

los mundos excesivamente artificiales (y aburridos) de cierta matemática pura. Afortunadamente, presenciamos hoy día una serie de sucesos simultáneos - a saber, la explosión de vitalidad de la matemática pura, los éxitos de las matemáticas en la formulación y resolución de los problemas clave de la física contemporánea, la economía y la industria, y la variedad insospechada de aplicaciones de todas las ramas de las matemáticas. Todo ello está alterando profundamente la visión de ambos campos, que tienden a confluir en uno, en la mejor tradición del pasado. Este esfuerzo generoso no es nuevo, como expresan las palabras del notable matemático ruso del siglo XIX P. L. CHEBYSHEV: *"Unir la teoría y la práctica conduce a los más favorables resultados; no sólo la práctica se beneficia, también las ciencias se desarrollan bajo la influencia de la práctica que revela* nuevos temas *a la investigación, así como nuevos aspectos de viejos temas"*[93]. La importancia de la teoría para la práctica viene descrita en estas bellas palabras de Euler: *"La généralité que j'embrasse, au lieu de'éblouir nos lumières, nous découvrira plutôt les véritables lois de la Nature dans tout leur éclat"*[94].

Es para los profesionales un gran misterio el que las partes pura y aplicada de las matemáticas sean caras de la misma moneda. Que ambas no son exactamente lo mismo queda muy bien reflejado en las palabras de Albert Einstein: *"Hasta donde las leyes de matemática se refieren a la realidad, no son exactas; y en cuanto son exactas no se refieren a la realidad"*[95]. Pero el ideal y la práctica se unen con resultados sorprendentes. Es famosa la frase de E. WIGNER que se asombraba de la *"efectividad de las matemáticas en las ciencias más allá de lo razonablemente esperable"*, literalmente, *"the unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences"*[96].

Hacer y enseñar matemáticas hoy

Pasamos a comentar los cambios en la manera de "hacer matemáticas", especialmente cuando son aplicadas. La emergencia de la *era del ordenador* ha dado nuevas alas a las matemáticas, *¡podemos calcular!* La

---

[93]Tomado de KHINCHIN, A. I. *Mathematical Foundations of Information Theory.* Dover. New York, 1957. (Papers appeared in 1953, 1956 in Unspekhi Mat. Nauk in Russian.) Énfasis nuestro.

[94]En traducción algo libre, "La generalidad con la que opero, en lugar de despistarnos, nos descubrirá las verdaderas leyes de la Naturaleza en todo su esplendor". La frase figura en la tapa de la revista *Archive Rat. Mech. Anal.*

[95]Tomado de *Geometry and Science*, 1921. Incluido en *Sidelights of Relativity.* Dover. New York, 1983. Traducción propia

[96]Conferencia dada en New York, 1959. Publicada en la revista *Comm. Pure Applied Math.*, **13**. 1960. Págs. 1-14.

capacidad de *cálculo eficaz, rápido y barato* se ha hecho disponible al principio del siglo de XXI para el científico y en medida creciente para el hombre común, y la sociedad pide cada día más. Ello plantea retos y reflexiones.

Los teoremas siempre serán teoremas y una deducción lógica sigue siendo la llave de la correcta comprensión, pero la vía al descubrimiento nunca será ya la misma, como tampoco lo es el *día después:* la implementación numérica es ahora punto importante en muchas de las matemáticas (en todas las matemáticas aplicadas). No se trata de abjurar de Euclides, se trata de desarrollar la parte de Euclides inventor de algoritmos. Los efectos sobre la enseñanza son de lo más drástico, como es de suponer, pero todavía están siendo desarrollados[97].

Con ello llegamos a un importante tema de debate, ¿es la nueva forma de hacer y aplicar las matemáticas meramente instrumental o genera nuevas matemáticas? Este es un debate tan viejo al menos como Arquímedes, que utilizaba la mucha mecánica que sabía para inventar pruebas geométricas o conceptos completamente nuevos. Sostenemos pues que los nuevos campos son fuente inagotable de nuevos problemas, nuevas intuiciones, o visiones sorprendentes de viejos temas que dábamos por perdidos o por agotados. Repasemos tan sólo algunas de las páginas anteriores para ver la sorprendente cosecha geométrica de las teorías de partículas de Donaldson, Witten y compañía. O las consecuencias del poder de cálculo sobre las disciplinas más puras como la teoría de números o el álgebra.

La modelización

Un rasgo importante de las matemáticas aplicadas modernas es la modelización matemática, el arte de idear *representaciones sensatas* de los más diversos fenómenos del mundo real en términos matemáticos, basadas en *hipótesis racionales* que simplifican la realidad para hacerla calculable. J. L. Lions, el matemático francés recientemente fallecido que tanto contribuyó a la presente relevancia de las matemáticas en el mundo industrial europeo, dijo en 1991: *"Ce que j'aime dans les mathématiques appliquées c'est qu'elles ont pour ambition de donner du monde des systèmes une représentation qui permette de comprendre et d'agir"*[98]. Y añadió: *"De*

[97] Internet está poblada de propuestas didácticas maravillosas; junto a otras abominables, claro está

[98] *"Lo que me gusta de las matemáticas aplicadas es que ambicionan dar una representación del mundo de los sistemas que permita comprender y actuar".*

toutes les représentations, la représentation mathématique, lorsqu'elle est possible, est celle qui est la plus souple et la meilleure."[99]

Hemos de recordar que un modelo es sólo un modelo y refleja la realidad de la forma contradictoria que Einstein describía. Pero es todo lo que nosotros tenemos, a menos que consideremos un modelo mejor (o incluso una jerarquía de ellos). Esta es la gloria y la debilidad de la modelización, aspecto crucial de la matemática aplicada actual. El público que presencia el acalorado debate sobre las predicciones de los modelos matemáticos del clima acerca del calentamiento global en la Tierra sabe cuán importante es el problema y debe comprender *cuán difícil es llegar a conclusiones nítidas y fiables manejando evidencias parciales, basadas en modelos parciales y apoyadas por enormes bases de datos de compleja interpretación*, y huyendo de juicios a priori por muy verosímiles que parezcan. Pero es también claro que toda conclusión no basada en números y modelos fiables es pura ideología. Lo que nos permite apreciar el mérito de los modelizadores gigantes del pasado, como Newton, Maxwell, Einstein y el grupo cuántico.

Promesas y plazos

Como hemos apuntado, una enorme parte de las mejores matemáticas se ha originado para explicar aspectos del mundo físico, pero rara vez las consecuencias dramáticas de las matemáticas han sido inmediatas. La formulación de los procesos físicos en clave matemática al gusto de Galileo exige un proceso de maduración que tiene sus reglas y ritmos, que van desde varios años a varios siglos[100].

En un nivel más especulativo, el conocido matemático y escritor científico Ian Stewart afirma que es posible que las matemáticas sean eficaces *"porque representan el lenguaje subyacente del cerebro humano"*. Con lo cual invertimos la apuesta de Galileo, quizá entendemos el mundo en clave matemática porque esa es la clave de nuestra mente. Pero ese es un debate distinto.

Puntos para un debate

Resumiré a continuación las opiniones básicas que me he formado en años de estudio y curiosidad por el mundo de la matemática. Espero

---

[99] *"De todas las representaciones la matemática, cuando es posible, es la mejor y la más flexible"*.

[100] Sería una bendición si la administración y las autoridades educativas fueran conscientes de este hecho en su toma de decisiones.

que sea mínimamente útil en el eterno y necesario debate:

- Sólo las buenas matemáticas pueden ser buenas matemáticas aplicadas. Las Matemáticas Aplicadas como arte diferente y separado de la Matemática propiamente dicha, simplemente no existen[101]. Pero al poner las matemáticas a trabajar, la aplicación las cambia, las enriquece y les abre nuevas vías.

- La Matemática sólo es aplicada de verdad si ataca un importante problema de la ciencia, la tecnología, la economía, o más generalmente, de la sociedad. Ya hemos visto cuán variados estos problemas pueden ser.

- Si bien podemos llegar a juzgar con cierto grado de fiabilidad qué es importante hoy, la tarea de predecir qué rama de la matemática será importante mañana (la llamada planificación estratégica) excede la capacidad de las personas sensatas, salvo que simplemente contestemos: "las buenas matemáticas importarán" o "las matemáticas del mundo real importarán siempre". Las hipótesis autorizadas y opiniones sobre temas específicos son humanas y pueden ser útiles como orientación personal, pero cuando se trata de decisiones y prioridades la prudencia es de rigor.

- Desde un perspectiva histórica no se puede afirmar que los grandes matemáticos vivan en una torre de marfil de teorías desconectadas de toda realidad. No decimos que no puedan hacerlo, o que no les resulte interesante, necesario, incluso natural en muchos momentos, vivir en la abstracción absoluta; afirmamos que, vista en perspectiva, su actividad ha sido un factor esencial en la comprensión que hoy tenemos del mundo.

- Está además la interesante cuestión de filosofía: es un hecho bien atestado que al enfrentarse a un enigma matemático, al matemático "aplicado" le gusta construir y comparar modelos adecuados, y ansía *resolver el enigma* preciso planteado sea cual sea el daño temporal que se inflija a la perfecta deducción lógica, mientras su colega "puro" se deleita en la prueba lógica; sólo la *demostración* gobierna sus días.

Así pues, ¿son lo mismo las matemática puras y las aplicadas? o más cuidadosamente formulado, ¿son lo mismo en el fondo? Dejemos al amable lector que juzgue por sí mismo. Ya saben mi opinión (más o menos), pero me permito agregar en un tono más relajado una cita de Yogi Berra[102]: *"En teoría no hay ninguna diferencia entre teoría y*

[101] Tomo en parte esta idea radical de A. Rényi, (RÉNYI, A. *Dialogues on Mathematics.* Holden-Day. San Francisco, 1967.), quien la atribuye en su relato a Arquímedes.

[102] Famoso jugador de béisbol americano, muy conocido por sus cómicas pero atinadas salidas. Esta es la frase original: *"In theory, there is no difference between theory*

práctica; en la práctica, sí que hay".[103]

12. BREVE APUNTE SOBRE LAS MATEMÁTICAS EN ESPAÑA

España tuvo en un momento dado de la Edad Media tardía un papel importante en la transmisión de la cultura árabe a Occidente e incluso hubo un rey en Sevilla[104] que escribió poesía y promovió las matemáticas (el saber astronómico). Al Andalus, la España musulmana, tenía sólidos intereses científicos, en particular en medicina y astronomía, con sabios de renombre como AZARQUIEL (o Al-Zarkali, activo en Toledo), quien compuso tablas astronómicas. El sistema de numeración indio basado en la posición ya estaba en uso en Al Andalus en el siglo IX. [105] Después de la toma por los Cristianos (1085 d.C.), Toledo, la ciudad de las tres culturas - cristiana, árabe y judía -, fue durante siglos un gran centro de saber con su Escuela de Traductores que vertieron al latín los trabajos de autores griegos y árabes[106]. En otra dirección, el mallorquín Raimundo LULIO (Ramón Llull) desarrolló en su *Ars Magna* un entero arte de razonamiento algorítmico en que podemos ver un temprano precedente del Álgebra de Boole y la lógica de las computadoras (Llull, que vivió en el siglo XIII, es al mismo tiempo uno de los clásicos más antiguos de la lengua catalana). Un siglo más tarde, los mapas náuticos llamados *portulanos* de Mallorca eran la cima del arte, y los nombres de SOLER y CRESQUES son muy conocidos. Parece que los mallorquines participaron en la organización de la escuela náutica portuguesa que fue el origen del descubrimiento del camino a las Indias alrededor de África, e, indirectamente, también de América.

Luego las cosas fueron a peor por largo tiempo. Las fundadas esperanzas del tardo Medievo y primer Renacimiento fallaron en España, y la matemática (y las otras ciencias) han tenido un humilde devenir durante

---

and practice; in practice, there is".

[103] He aquí una (medio) broma sobre las diferentes formas de ver las matemática: los ingenieros dicen que las ecuaciones aproximan la realidad, mientras los físicos piensan que la realidad aproxima las ecuaciones; por su lado, los matemáticos se asombran ante la idea de que exista una conexión entre "sus" ecuaciones y la realidad (y se enojan no poco si se les insiste).

[104] Alfonso X el Sabio.

[105] La primera escuela andalusí de matemáticas parece haber sido la de Maslama al Magriti, es decir, de Madrid, que floreció en el siglo X en Córdoba. Puede considerarse la primera escuela en la Península en todos los tiempos, y tuvo numerosos discípulos. En el siglo XII el rey Almutamán de Zaragoza fue un notable matemático.

[106] El monasterio de Sta. María de Ripoll en Cataluña también tenía una biblioteca mundialmente conocida.

siglos. Mientras la literatura española y arte están con la crema de la creación mundial desde el siglo XVII hasta nuestros días, está claro que ningún nombre español aparece en los libros de texto afamados en que se aprenden las matemáticas, elementales o superiores. Hay en tales textos numerosos conceptos y resultados nombrados en honor a autores de las diversas naciones con gran tradición científica: franceses, ingleses, alemanes, italianos (e Italia era un país católico), en tiempos más recientes rusos y americanos,.., como también son frecuentes los ejemplos países que, debido a su tamaño y las circunstancias, no jugaron un papel tan prominente en la Historia, pero que sí están en el *Libro de la Ciencia*. Durante estos siglos de desarrollo glorioso, de Galileo a Einstein, no se mencionan nombres españoles. ¿Pudo la historia haber sido diferente? El rey Felipe II comprendió la necesidad de la ciencia y creó una *Academia Matemática* en Madrid (1582) bajo la dirección de Juan de Herrera, el arquitecto de El Escorial, pero la institución no tomó cuerpo y dejó de existir unos años después, mientras que iniciativas similares dieron nacimiento en el extranjero a la *Royal Society* en Inglaterra, la *Académie des Sciences de Paris* en Francia, y así sucesivamente. Ha habido, sin duda, ejemplos de ilustres hombres digno de mención, como Pedro Ciruelo, Omerique, Jorge Juan y Echegaray, pero son autores aislados, una escuela nunca tomó raíz hasta muy recientemente y ningún gran teorema salió de sus esfuerzos. Hubo en el siglo XVIII un gran esfuerzo de los gobiernos ilustrados por afianzar en el país el amor al estudio y la industria y España participó en la medición del meridiano terrestre, pero las consecuencias matemáticas fueron reducidas.[107] ¿Cuáles son las razones? Difícil cuestión, pero señalemos que durante siglos se prohibió a los estudiantes y profesores españoles viajar y aprender en los países extranjeros, una regla de seguridad bastante estricta que previno con éxito contra la heterodoxia, y al tiempo contra la ciencia y el progreso.

Éste no es lugar para un estudio detallado de la Historia, para lo cual dirigimos al lector a los especialistas[108], así que procederemos señalando cómo se ha llegado en fecha muy reciente a un presente bastante halagüeño. España pareció surgir de su profundo letargo matemático en la primera mitad de este siglo y la figura del insigne J. Rey Pastor sirve como referencia a un esfuerzo notable de poner al día a nuestro país basado en las únicas ideas que podían funcionar: el estudio en los

[107] El lema de la Academia de Ciencias portuguesa resume el espíritu de esta época: *Nisi vtile est qvod facimvs stvlta est gloria. "Si lo que hacemos no es útil, tonta es la gloria"*.

[108] Como Juan Vernet, cuyo trabajo (VERNET GINÉS, J. *Historia de la Ciencia Española.* Editorial Alta Fulla. Barcelona, 1998), se usa en los párrafos anteriores.

grandes centros del extranjero y la importación de las matemáticas que realmente existen en la comunidad mundial, que es la única que tiene real sentido en la ciencia, al menos en la nuestra. Este método había tenido un éxito fulgurante en la creación de la matemática norteamericana y todo indicaba que había de funcionar en nuestro país. Sin embargo, nuestra funesta historia se encargó de disgregar el notable esfuerzo, que daría frutos abundantes en tierras americanas, personificados en figuras como L. Santaló. Con alguna muy honrosa excepción, que la hubo, la actividad matemática hasta los años 60 volvió al ritmo del pasado.

Poco a poco, sobre todo a partir de los años 70, comienza por fin el despertar de España a lo que podríamos llamar la realidad matemática. Tras una década de esfuerzo ingente de una generación que aprendió en las fuentes originales, que enseñó en sus clases los textos más actuales, que organizó seminarios de investigación y que viajó o mandó a sus jóvenes alumnos al extranjero, que empezó a publicar en las revistas internacionales reconocidas y a participar en los grandes eventos, llegan, a partir de los años 80, los años dorados de la *creación original*, lo que se traduce en las mil facetas de la vida matemática auténtica y que se reflejan (aunque no se resuman) en la palabra *publicación*: las mejores revistas empiezan a recibir artículos de autores españoles, primero tímidamente, luego en cascada[109]. Las señales de los buenos tiempos se hacen múltiples e inequívocas, y podemos concluir que "España ya no es diferente". Los indicadores oficiales nos permiten poner cifras a esta evidencia de cambio. De ellos se deducen dos hechos que inicialmente han sorprendido a muchos:

(a) Que las matemáticas españolas han pasado de un lugar muy modesto en 1980 (menos del 0.4 % de la producción mundial según la base de datos ISI[110]) a una posición honorable en el momento, inmediatamente después de EE.UU., Alemania, Inglaterra, Francia, Rusia, Italia, Japón y Canadá, con una producción en revistas importantes que se ha multiplicado por un factor de más de 10 y representa en 2001 una proporción mundial de más de 4,18 % (ISI).

(b) Que en el análisis comparativo de la ciencia española, la Matemática figura entre las especialidades bien situadas.

[109] En esta coyuntura conviene evocar las palabras de Galileo sobre la Ciencia que le atribuye B. Brecht en su *Vida de Galileo*: *"La Ciencia tiene un solo mandamiento: contribuir a la Ciencia"*.

[110] *Institute for Scientific Information.*

Para más información sobre la investigación matemática en España en el último decenio referimos al lector al informe *La investigación matemática en España en el periodo 1990-1999*[111], que refleja en gran detalle los avances realizados.

Otra consecuencia del estado creativo de la matemática española es la presencia de numerosos y valiosos libros de texto y monografías de investigación en prestigiosas colecciones. Digamos además que España, que ha alcanzado una sólida posición en la investigación, también cuenta con una tradición en educación matemática, con un papel muy influyente en el ICMI[112].

Finalmente, la tendencia hacia los aspectos computacionales y aplicados de las matemáticas, junto con el énfasis en las matemáticas como herramienta por excelencia en la modelización, es ahora fuertemente sentida en una comunidad anteriormente ligada casi en exclusiva al pensamiento matemático abstracto. Abrir las ventanas al ancho mundo de ahí fuera es un reto enorme en pro de la salud de nuestra matemática y del bienestar de generaciones futuras, y todos los esfuerzos son bienvenidos. ¡Dejemos entrar el aire fresco!

13. CONCLUSIÓN

Llegamos al fin de nuestro viaje. Hemos dicho al principio del relato que la "Matemática Aplicada" es la Matemática del "Mundo Real". Puede quedarle al lector cierta duda sobre la esencia de tales conceptos, y se preguntará si han sido suficientemente aclarados en el texto. No ha sido nuestro propósito examinar a fondo este problema más bien filosófico. Siguiendo la práctica usual de los matemáticos aplicados, poco partidarios del exceso de teorización, o quizá movidos por la inmensidad de la tarea y la premura de tantos nuevos hallazgos, hemos seguido una *aproximación constructiva* a ambos conceptos y hemos intentado mostrar su contundente relevancia en la gestación de la sociedad actual y su papel en el futuro que se vislumbra. Lo que no excluye que otros se ocupen de tales temas con un espíritu más discursivo.

---

[111] ANDRADAS, C., ZUAZUA, E. (Coordinadores) *La investigación matemática en España en el periodo 1990-1999*. Comité Español para el Año Mundial de las Matemáticas (CEAMM). Madrid, 2000.

[112] *The International Commission on Mathematical Instruction*, presidida durante años por el matemático español Miguel de Guzmán.

Recordando a Galileo, me gustaría concluir así: el *Libro de la Naturaleza* se abre ante nosotros para que lo admiremos con su infinita, cambiante y sorprendente belleza; las matemáticas como lenguaje de la ciencia están ahí para que comprendamos la Naturaleza, y nos permiten además utilizarla y explotarla, estando este aspecto final cargado de promesas y peligros, como todo lo humano. Espero que los matemáticos de hoy día realicemos nuestra parte en el esfuerzo de comprender y mejorar la Sociedad de la Información que nos ha tocado ver nacer. En la era de los ordenadores y la información, *la Realidad está en el Número*, como habría gustado a Pitágoras. O por lo menos un enorme pedazo de ella la explican y la reproducen los números, con la ayuda de nuestros amigos científicos y tecnólogos, y de los ordenadores.

- - • - -

COMENTARIO FINAL. La idea de este artículo divulgativo se originó con los esfuerzos de las Sociedades Matemáticas españolas para celebrar el Año Matemático Mundial 2000. El autor está en deuda con los organizadores de aquel evento, con la Sociedad Nuevo Milenio, con los colegas que han suministrado múltiples sugerencias, con la Univ. de Texas en Austin y con la Sociedad Española de Matemática Aplicada que tuvo a bien premiar un extenso escrito en inglés que desarrolla estas ideas y que pueden encontrar en `http://www.uam.es/juanluis.vazquez`.

El apéndice histórico refleja ideas del autor sobre el presente de la Matemática española tomado con mínimos cambios de la referencia VÁZQUEZ, J. L. *Mathematical Events in Spain in the Year 2000.* Intelligencer. Springer-Verlag, julio 2000. Págs. 12-14, sección primera[113]. Interesantes fuentes en español son los *Boletines de SEMA*; la *Gaceta de la RSME* (cf. el vol. 3, 1. 2000.) y la *Revista Española de Física*, vol 14, no. 5, consagradas al estado de la Matemática con ocasión de la celebración del Año Mundial Matemático[114]. Las ilustraciones están tomadas del sitio web *The MacTutor History of Mathe-*

---

[113] Más sobre el mismo asunto en VÁZQUEZ, J. L. *"Las Matemáticas y los objetivos del año 2000. Un llamamiento a los matemáticos españoles". Gaceta de la Real Soc. Matemática Española,* vol. 3, 1. 2000. Págs. 9-22. Ver, también, http://dulcinea.uc3m.es/ceamm.

[114] ARNOLD, V., ATIYAH, M., LAX, P., MAZUR, B. *Mathematics: Frontiers and Perspectives.* AMS Publications. Providence, 2000.

ENGQUIST, B., SCHMID, W. (Editores). *Mathematics Unlimited - 2001 and Beyond.* Springer-Verlag. Berlin, 2001.

JACKSON, A. *"Mathematical challenges of the XXI century". Notices Amer. Math. Soc.,* vol. 47, n.º 10. 2000. Págs. 1271-1273.

MUMFORD, D., FRIEDMAN, L., LOVÁSZ, L., MANIN, YU., ROTA, G. C., JENSEN, R. B. y PENROSE, R. Informe sobre el futuro de las Matemáticas contenido en *Mitteilungen der Deutchen Math. Vereinigung* (es decir, *Notices of the German Math. Union*), 2. 1998.

OBRA COLECTIVA. *Fotografiando las Mathematics.* Carroggio S.A. de Eds. Barcelona, 2000.

STEWART, I. *The Problems of Mathematics.* Oxford Univ. Press. Oxford, 1992.

matics Archive, de la Univ. de St Andrews, un notable archivo biográfico cuya lectura me ha sido de gran utilidad. Finalmente, la lista de referencias que sigue refleja lecturas del autor durante la preparación de este texto y no significa en modo alguno una selección de las mejores lecturas disponibles.

REFERENCIAS

ANDRADAS, C., ZUAZUA, E. (Coordinadores) *La investigación matemática en España en el periodo 1990-1999.* Comité Español para el Año Mundial de las Matemáticas (CEAMM). Madrid, 2000.

ARNOLD, V., ATIYAH, M., LAX, P., MAZUR, B. *Mathematics: Frontiers and Perspectives.* AMS Publications. Providence, 2000.

BABUSKA, I. *"Courant Element: Before and After"*. En *Finite Element Methods.* Editado por Krizek, Neittaanmäki and Sternberg. M. Dekker Inc. New York, 1994.

BARENBLATT, G. I. *"George Keith Batchelor and Daniel George Crighton, Applied Mathematicians". Notices American Math. Soc.*, vol 48, n.º 8. 2001. Págs. 800-806.

BROWDER, F. (ed.) *"Mathematical Developments arising from Hilbert Problems". Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, XXVIII.* Amer. Math. Soc. Providence, 1976.

CASTI, J. L. *Five Golden Rules.* John Wiley. New York, 1996. *Five More Golden Rules.* John Wiley. New York, 2000.

CHAITIN, G. *The limits of mathematics.* Springer. Singapore, 1998.

CIPRA, B. *What is happening in the Mathematical Sciences*, vols. 1-4. Amer. Math. Soc. Providence, 1999.

COMAP. *Las Matemáticas en la vida cotidiana.* Addison Wesley - Universidad Autónoma de Madrid. 1998. Versión inglesa: GARFUNKEL, S. et al. *Introduction to Contemporary Mathematics.* W.H. Freeman & Co. New York, 1988.

ENGQUIST, B., SCHMID, W. (Editores). *Mathematics Unlimited - 2001 and Beyond.* Springer-Verlag. Berlin, 2001.

FEYNMAN, R. P. *Feynman Lectures On Physics (3 Volume Set).* Reading, Mass., Addison-Wesley Pub. Co. Boston, 1963-65.

FEYNMAN, R. P. *Six Easy Pieces: Essentials of Physics Explained by Its Most Brilliant Teacher*. Helix Books. New York, 1995. (Addison-Wesley Longman. Boston, 1996) And *Six Not-So-Easy Pieces: Einstein's Relativity, Symmetry, and Space-Time*. Addison-Wesley Pub., Reading, Mass. Boston, 1997.

FONSECA, I. et al. *"The Impact of Mathematical Research on Industry and vice versa"*. Round Table at 3rd European Congress of Mathematics. Barcelona, july 2000.

FRIEDMAN, A. et al. *"Mathematics in Industrial Problems"*. (A 10 volume collection) *IMA Volumes in Mathematics and its Applications*. Springer-Verlag. Berlín, 1988-1998.

FRIEDMAN, A., LAVERY, J. *How to Start an Industrial Mathematics Program in the University*. SIAM Report. Philadelphia, 1993.

GLEICK, J. *Chaos: Making a New Science*. Penguin Books. Nueva York, 1987.

HARDY, G. H. *A Mathematician's apology*. Cambridge University Press. Cambridge, 1940.

HERNÁNDEZ, E., WEISS, G. *A first course on wavelets. With a foreword by Yves Meyer*. Studies in Advanced Mathematics. CRC Press. Boca Raton, FL, 1996.

JACKSON, A. *"Mathematical challenges of the XXI century". Notices Amer. Math. Soc.*, vol. 47, n.º 10. 2000. Págs. 1271-1273.

JAFFARD, S., MEYER, Y., RYAN, R. D. *Wavelets, tools for Science and Technology*. SIAM. Philadelphia, 2001.

KHINCHIN, A. I. *Mathematical Foundations of Information Theory*. Dover. New York, 1957. (Papers appeared in 1953, 1956 in Unspekhi Mat. Nauk in Russian.)

KLINE, M. *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times.* Oxford Univ. Press. Oxford, 1972.

KLINE, M. *Mathematics. The loss of certainty.* Oxford Univ. Press. Oxford, 1980.

MAURY, J. P. *Galileo, el mensajero de los astros.* Claves, Ed. B.S.A. Barcelona, 2000.

METROPOLIS, N., HOWLETT, J., ROTA, G. C. (Eds.) *A History of Computing in the Twentieth Century.* Academic Press. New York, 1980.

MEYERS, P. A. *Encyclopedia of Modern Physics.* Academic Press. San Diego, 1990.

MORIYASU, K. *An elementary primer in Gauge Theory.* World Scientific. Singapore, 1983.

MUMFORD, D., FRIEDMAN, L., LOVÁSZ, L., MANIN, YU., ROTA, G. C., JENSEN, R. B. y PENROSE, R. Informe sobre el futuro de las Matemáticas contenido en *Mitteilungen der Deutchen Math. Vereinigung* (es decir, *Notices of the German Math. Union*), 2. 1998.

MUÑOZ SANTONJA, J. *Newton, el umbral de la ciencia moderna.* Col. *La Matemática en sus personajes*, vol. 3. Nivola ed. Madrid, 1999.

NASAR, S. *A beautiful Mind: A Biography of John Forbes Nash, Jr.* Simon & Schuster. New York, 1998. (En castellano, *Una mente prodigiosa. Historia de John Forbes Nash.* Grijalbo Mondadori. Barcelona, 2001.)

NEWTON, I. *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica.* Pepys. London, 1687. (En castellano, *Principios matemáticos de la Filosofía Natural.* Alianza Ed. Madrid, 1987.)

OBRA COLECTIVA. *Fotografiando las Mathematics.* Carroggio S.A. de Eds. Barcelona, 2000.

ODEN, J. T. et al. *"Research directions in computational mechanics". Report of the US National Commitee on Theoretical and Applied Mechanics.* Washington, 2000.

RÉNYI, A. *Dialogues on Mathematics.* Holden-Day. San Francisco, 1967.

REVISTA ESPAÑOLA DE FÍSICA, volumen 14, nnñumero 5. 2000. Número especial: *La Física y las Matemáticas.*

SÁNCHEZ RON, J. M. *El siglo de la ciencia.* Taurus. Madrid, 2000.

SCHIFFER, M. M., BOWDEN, L. *"The role of Mathematics in Science". The Math. Assoc. of America, New Math. Library* vol. 30. 1984.

SIMMONS, J. *The scientific 100.* Citadel Press, Kensington Publ. Corp. Nueva York, 1996.

SINGH, S. *The Code Book: The Science of Secrecy from Ancient Egypt to Quantum Cryptography.* Doubleday & Company. Nueva York, 1999.

SMITH, W. *Mapping and Sequencing the Human Genome: A Beginner's Guide to the Computational Science Perspective. ACM Crossroads Student Magazine*, http://www.acm.org/crossroads/ xrds4-1/genome.html.

STAUFFER, D., STANLEY, H.E. *From Newton to Mandelbrot, A Primer in Theoretical Physics.* Springer. Berlin, 1991.

STEWART, I. *The Problems of Mathematics.* Oxford Univ. Press. Oxford, 1992.

TANUR, M., MOSTELLER, F. et al. *Statistics: A Guide to the Unknown.* Brooks/Cole. Pacific Grove, 1989.

VÁZQUEZ, J. L. *"Las Matemáticas y los objetivos del año 2000. Un llamamiento a los matemáticos españoles". Gaceta de la Real Soc. Matemática Española,* vol. 3, 1. 2000. Págs. 9-22. Ver, también, http://dulcinea.uc3m.es/ceamm.

VÁZQUEZ, J. L. *"Mathematical Events in Spain in the Year 2000". Intelligencer. Springer-Verlag.* Julio 2000. Págs. 12-14.

VERNET GINÉS, J. *Historia de la Ciencia Española.* Editorial Alta Fulla. Barcelona, 1998.

WATERMAN, M. S. *Introduction to Computational Biology.* Chapman & Hall. Londres, 1995.